ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
Laurea in Ingegneria Automatica
Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Esame del 20 febbraio 2009

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ____________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{sen(z-2)}{(z-2)^2} dz$$

se γ é

(i) il bordo dell'insieme definito da $\{z \in C : \ 3 \leq Re(z) \leq 5 \ , 4 \leq Im(z) \leq 6\}$.

(ii) la circonferenza $|z-2| = 5$.

Soluzione

L'unica singolaritá é $z = 2$, polo di ordine 1 con residuo uguale a 1 (basta sviluppare in serie di Laurent la funzione integranda, usando lo sviluppo in serie di Taylor di $sen(z-2)$). Nel caso (ii) la singolaritá cade entro la curva e dunque l'integrale, per il teorema dei residui, vale $2\pi i$; nel caso (i) cade fuori dalla curva e dunque l'integrale, per il teorema integrale di Cauchy, vale 0.

E 2 Trovare il segnale $f(t)$ la cui trasformata di Laplace é :

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s+a}.$$

con $a \in C$. Determinare tutti i numeri complessi a per cui $|f(t)| \leq 1$ per $t \geq 2$.

Soluzione

Il segnale é $f(t) = H(t-2)e^{-a(t-2)}$ dove $H(t)$ é la funzione gradino unitario. I numeri complessi che soddisfano la proprietá richiesta sono i numeri a per cui $Re(a) \geq 0$.

(ricordare che $|e^{-a(t-2)}| = e^{-Re(a)(t-2)}$)

E 3 Studiare la convergenza puntuale, assoluta e totale della seguente serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(|e^z|-1)^n}{n} \qquad z \in C$$

Soluzione

Ponendo $t = |e^z| - 1$, si ottiene una serie di potenze in campo reale centrata in 0, con raggio di convergenza $R = 1$; pertanto questa serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) nell'intervallo $(-1, 1)$ e totalmente in ogni l'intervallo $[-a, a]$ con a arbitrario in $(0, 1)$. Per il teorema di Abel, si ha convergenza uniforme in ogni intervallo $[-a, 1]$, $a \in (0, 1)$ (infatti, per $t = 1$ la serie converge perché di Leibnitz).
Ritornando alla variabile $z = x+iy$ e ricordando che $|e^z| = e^x$, si ha che la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) nel sottoinsieme del piano complesso definito da $\{z = x+iy \in C : x < log2, y \in R\}$, che rappresenta un semipiano; inoltre cé convergenza totale in ogni sottoinsieme $\{z = x + iy \in C : b \leq x \leq c < log2, y \in R\}$, $\quad b \in R$ e convergenza uniforme in ogni sottoinsieme $\{z = x + iy \in C : b \leq x \leq log2, y \in R\}$, $\quad b \in R$.

Nome e Cognome ____ **matricola** ____________________ 1.4

D 1

(i) Scrivere l'eguaglianza di Parseval, precisando le ipotesi sotto cui vale .

(ii) Dire quanto vale la somma della serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier della funzione periodica di periodo 2π definita da $f(t) = t^2$ in $(-\pi, \pi]$ (non calcolare i coefficienti di Fourier)

Soluzione

(ii) La somma vale $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{2}{5}\pi^4$

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________ 1.5

D 2

(i) Definizione di funzione analitica in un aperto A del piano complesso; principio di identitá delle funzioni analitiche.

(ii) Una funzione $f(z)$ é analitica in C e vale 3 in ogni punto del segmento di estremi $z_1 = 0$ e $z_2 = i$. Calcolare $f(5)$.

Soluzione

(ii) $f(5) = 3$ in quanto la funzione é analitica e coincide con la funzione anch'essa analitica $g(z) = 3$ su un segmento, che non é un insieme costituito interamente da punti isolati (anzi sono tutti non isolati). Dunque per il principio di identitá la funzione non puó che essere identicamente uguale a 3.