ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
Laurea in Ingegneria Automatica
Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Esame del 20 febbraio 2009

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{sen(z-1)}{(z-1)^2} dz$$

se γ é

(i) il bordo del quadrato di vertici i, -i, 2-i, 2+i.

(ii) il bordo del rettangolo di vertici 2+i, 3+i, 3-i, 2-i.

Soluzione
L'unica singolaritá é $z = 1$, polo di ordine 1 con residuo uguale a 1 (basta sviluppare in serie di Laurent la funzione integranda, usando lo sviluppo in serie di Taylor di $sen(z-1)$). Nel caso (i) la singolaritá cade entro la curva e dunque l'integrale, per il teorema dei residui, vale $2\pi i$; nel caso (ii) cade fuori dalla curva e dunque l'integrale, per il teorema integrale di Cauchy, vale 0.

E 2 Trovare il segnale $f(t)$ la cui trasformata di Laplace é :

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s-a}.$$

con $a \in C$. Determinare tutti i numeri complessi a per cui $|f(t)| \leq 1$ per $t \geq 1$.

Soluzione

Il segnale é $f(t) = H(t-1)e^{a(t-1)}$ dove $H(t)$ é la funzione gradino unitario. I numeri complessi che soddisfano la proprietá richiesta sono i numeri a per cui $Re(a) \leq 0$.

(ricordare che $|e^{a(t-1)}| = e^{Re(a)(t-1)}$)

E 3 Studiare la convergenza puntuale, assoluta e totale della seguente serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(|e^z|-2)^n}{n^3} \qquad z \in C$$

Soluzione

Ponendo $t = |e^z| - 2$, si ottiene una serie di potenze in campo reale centrata in 0, con raggio di convergenza $R = 1$, convergente totalmente in tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

Ritornando alla variabile $z = x + iy$ e ricordando che $|e^z| = e^x$, si ha che la serie converge totalmente in tutto il sottoinsieme del piano complesso definito da $\{z = x + iy \in C : 0 \leq x \leq log 3, y \in R\}$, che rappresenta una striscia parallela all'asse delle ordinate.

D 1

(i) Scrivere l'eguaglianza di Parseval, precisando le ipotesi sotto cui vale .

(ii) Dire quanto vale la somma della serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier della funzione periodica di periodo 2π definita da $f(t) = t - 1$ in $(-\pi, \pi]$ (non calcolare i coefficienti di Fourier)

Soluzione

(ii) La somma vale $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t-1)^2 dt = \frac{2}{3}\pi^2 + 2$

D 2

(i) Definizione di funzione analitica in un aperto A del piano complesso; enunciare il teorema sugli zeri delle funzioni analitiche.

(ii) Una funzione $f(z)$ é analitica in C e vale zero in ogni punto della circonferenza $|z| = 3$. Calcolare $f(i)$.

Soluzione

(ii) $f(i) = 0$ in quanto la funzione si annulla su una circonferenza, che non é un insieme costituito interamente da punti isolati (anzi sono tutti non isolati). Dunque per il teorema degli zeri di una funzione analitica, la funzione non puó che essere identicamente nulla.