1. Calcolare
$$\int_\gamma \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz$$
dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio $\frac{1}{2}$.

2. Mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$ é analitica nel complementare del cerchio di centro l'origine e raggio 1.

3. Mostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} sen\,(nz)$ é analitica nella regione $A = (z : -1 < Im\,(z) < 1)$.

4.Trovare la regione in cui $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{n}$ é analitica.

5. Calcolare i seguenti integrali $\int_\gamma \mathrm{sen\,z\,dz}$, $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen\,z}}{\mathrm{z}}\,\mathrm{dz}$, $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen\,z}}{\mathrm{z}^2}\,\mathrm{dz}$, $\int_\gamma \frac{\mathrm{sen(e^z)}}{\mathrm{z}^2}\,\mathrm{dz}$ dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

6. Calcolare $\int_\gamma \mathrm{f(z)dz}$ dove γ é il segmento congiungente 1 a i e $f(x + i\,y) = x^2 + iy^2$.

7. Trovare una funzione $v(x, y)$ tale che, posto $u(x, y) = \frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}$, si abbia $f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ olomorfa.

8. Semplificare: $\mathrm{e^{\log i}, \log i, \log(-i), i^{\log(-1)}}$.

9. Data f analitica in A e mai nulla e γ una curva generalmente regolare chiusa, provare che $\int_\gamma \frac{\mathrm{f'(z)}}{\mathrm{f(z)}}\,dz = 0$.

10. Data $f(x+i\,y) = u(x, y)+i\,v(x, y)$ analitica, indicare quali delle seguenti funzioni sono analitiche:
$$u - i\,v$$
$$-u - i\,v$$
$$i\,u - v$$

11.Calcolare:

$\int_\gamma \frac{z^2}{z-1}\, dz$ (γ circonferenza di centro l'origine e raggio 2)

$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\, dz$(γ circonferenza di centro l'origine e raggio 1)

12. Trovare i residui delle seguenti funzioni nei punti indicati:

$\frac{1}{z^2-1}, \quad z_o = 1$

$\frac{e^z - \frac{1}{2}}{z}, \; z_0 = 0$

$\frac{z}{z^2-1}, \quad z_o = 1$

$\frac{e^z-1}{z}, \; z_o = 0$

13. Mostrare che se f é olomorfa in tutto il piano complesso e tale che $|\mathrm{f(z)}| \leq \mathrm{M}|\mathrm{z}|^{\mathrm{n}}$, $\mathrm{n} \in \mathrm{N}$, allora f é un polinomio di grado al piú n.

14. Calcolare:

$\int_\gamma \frac{dz}{z^3}$ (γ quadrato di vertici $-1-i$, $1-i$, $1+i$, $-1+i$)

$\int_\gamma \frac{sen\,(z)}{z^4} dz$ (γ circonferenza unitaria di centro l'origine)

$\int_\gamma \frac{dz}{z^2-2i}$ (γ definita da $|z-1| = 2$)

$\int_\gamma \frac{dz}{z^2(z^2+16)}$ (γ definita da $|z| = 2$)

$\int_\gamma \frac{|z|e^z}{z^2}$ (γ definita da $|z| = 2$).

15. Trovare lo sviluppo di Laurent attorno a $z_o = 0$ e nelle regioni indicate delle seguenti funzioni:

$\mathrm{sen}(\frac{1}{\mathrm{z}})$ in $0 < |z| < +\infty$

$\frac{z}{z+1}$ in $0 < |z| < 1$ e in $1 < |z| < +\infty$

$\frac{1}{z(z+1)}$ in $0 < |z| < 1$

$\frac{e^z}{z^2}$ in $0 < |z| < +\infty$.

16. Quali tra queste funzioni hanno singolaritá eliminabili nei punti indicati?

$\frac{cos z-1}{z^2}$ in $z_o = 0$

$\frac{z}{z-1}$ in $z_o = 1$

$\frac{f(z)}{(z-z_o)^k}$ in z_o, zero di f di ordine k.

17.Trovare i primi quattro termini dello sviluppo di Laurent attorno a $z_o = 0$ di $\frac{1}{e^z-1}$ e di $\frac{cos z}{sen z}$.

18.Discutere le singolaritá di $\frac{1}{cos(\frac{1}{z})}$.

19. Provare che, se f(z) é analitica nel cerchio di centro l'origine e raggio 1 e se $|f(z)| \leq 1$, allora $|f'(0)| \leq 1$.

20. Calcolare la serie di Taylor attorno a $z_o = 0$ di e^{z^2}, $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, sen (z^2).

21.Dimostrare che, se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ha raggio di convergenza R, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} Re(a_n) z^n$ ha raggio di convergenza maggiore o uguale a R.

22. Dove converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen\,(nz)}}{2^{\mathrm{n}}}$. É olomorfa in quella regione?

23. Calcolare i seguenti residui:

$\mathrm{res}(\frac{\mathrm{z}^2}{(\mathrm{z}-1)^3(\mathrm{z}+1)}, 1)$
$\mathrm{res}(\frac{\mathrm{sen\,z}}{\mathrm{cos\,z}}, \mathrm{z_o})$ z_o singolaritá qualunque dela funzione
$\mathrm{res}(\frac{\mathrm{z}^2-1}{(\mathrm{z}^2+1)^2}, \quad \mathrm{i})$.

24. Valutare, usando il teorema dei residui, i seguenti integrali:

$\int_\gamma \frac{dz}{(z+1)^3}$ dove γ é

a) circonferenza di centro l'origine e raggio 2
b) quadrato di vertici $0, 1, 1+i, i$.

$\int_\gamma \frac{z}{z^2+2z+5} dz$ dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

$\int_\gamma \frac{1}{e^z-1} dz$ dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio 9.

$\int_\gamma \mathrm{tg(z)dz}$ dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio 8.

$\int_\gamma \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz$ dove γ é

a) quadrato di vertici $-1-i, 1-i, -1+i, 1+i$
b) ellisse $\gamma(t) = \mathrm{acos(t)} + \mathrm{bsen(t)}$ $a, b > 0$ $0 \leq t \leq 2\pi$.

25.Usare il teorema dei residui per calcolare i seguenti integrali di variabile reale:

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$\int_0^\pi \frac{dt}{(2+\cos \mathrm{t})^2}$

26. Calcolare i seguenti integrali a valor principale:

$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)}$

$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^2(x-1)}$ (Im(a) > 0)

Soluzioni

1.$2\pi i$ ($\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{z} + g(z)$, l'integrale di g(z)=0, perché é funzione olomorfa, mentre l'integrale di $\frac{1}{z}$ é $2\pi i$).

2. Posto w = $\frac{1}{\mathrm{z}}$, w é analitica nella regione indicata. Poiché $g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} w^n$ é analitica come somma di serie di potenze, la somma della serie iniziale é analitica nella regione.

3. Si scriva il termine ennesimo come $e^{-n}\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{inx}e^{-n(1+y)} - \frac{1}{2i}e^{-inx}e^{n(y-1)}$, se ne prenda il modulo, si osservi che la serie converge nella striscia indicata e totalmente in ogni striscia chiusa contenuta in tale striscia. Lo stesso accade per le serie che hanno come termine ennesimo le derivate parziali rispetto a x e a y del termine ennesimo. Pertanto si puó verificare facilmente, utilizzando il teorema di derivazione termine a termine, che $f_x = \frac{1}{i}f_y$. Osservare che si ha f_x, f_y continue e dunque $f(x,y)$ differenziabile.

4. Si ha $\frac{(2z-1)^n}{n} = \frac{2^n}{n}(z-\frac{1}{2})^n$,termine ennesimo di una serie di potenze centrata in $\frac{1}{2}$ e raggio di convergenza $\frac{1}{2}$.

5. $0, 0, 2\pi i, 2\pi i \cos(1)$
($\mathrm{sen}\,\mathrm{z}$ é olomorfa nel piano complesso, $\frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{z}}{\mathrm{z}}$ ha una discontinuitá eliminabile in zero e dunque il residuo é zero, $\frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{z}}{\mathrm{z}^2}$ ha un polo del primo ordine in zero con residuo 1, $\frac{\mathrm{sen}(\mathrm{e}^{\mathrm{z}})}{\mathrm{z}^2}$ ha un polo di ordine due in zero con residuo cos(1).

6. $\frac{2}{3}$ (calcolare l'integrale secondo la definizione; equazioni parametriche del segmento $x = t,\ y = 1 - t, \quad 0 \le t \le 1$).

7. $v(x,y) = -\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$ in $C - \{1\}$ (calcolare u_x, u_y , usare le condizioni di Cauchy-Riemann, integrare per esempio rispetto a x. Si ha $v(x,y) = -\int u_y(x,y)dx + g(y)$: la funzione g(y) si determina usando l'altra relazione di Cauchy-Riemann. In questo caso g(y)= costante).

8. $i,\ i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i,\ -i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i, e^{-\pi^2(1+2k)(\frac{1}{2}+2k)}$.

9. $\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{z})}{\mathrm{f}(\mathrm{z})}$ é funzione olomorfa (f′(z), in quanto derivata di funzione analitica é anch'esssa analitica e analiticitá equivale all'olomorfia).

10. No, sí, sí. (verificare che nel primo caso non sono soddisfatte le condizioni di Cauchy- Riemann, mentre negli altri due casi sí).

11. $2\pi i, 2\pi i$ (Usare teorema dei residui).

12. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ (Usare teorema dei residui).

13. Si prova, usando la formula integrale di Cauchy e l'ipotesi, che le derivate di ordine k della funzione con $k > n$ sono nulle.

$$|f^{(k)}(z_o)| \leq \frac{k!M}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z|^n dz}{|z-z_o|^(k+)} \leq \frac{k!M}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z-z_o|^n dz}{|z-z_o|^(k+1)} + \frac{k!M}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z_o|^n dz}{|z-z_o|^(k+1)}$$

e ciascuno dei due integrali é nullo.

14. $0, -\frac{1}{3}\pi i, \frac{\pi}{2}(1+i), 0, 4\pi i$ (usare il teorema dei residui).

15. $\text{sen}\frac{1}{z} = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+1)!} \qquad \text{in } 0 < |z| < +\infty$

$\frac{z}{z+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} \qquad \text{in } 1 < |z| < +\infty$

$\frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} = 1 - \sum_0^{+\infty}(-1)^n z^n \qquad \text{in } 0 < |z| < 1$

$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \sum_0^{+\infty}(-1)^n z^n \text{quad} \quad \text{in } 0 < |z| < 1$

$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{in } 0 < |z| < +\infty.$

16. La prima e la terza, la seconda ha un polo del primo ordine.

17. Usare il metodo dei coefficienti indeterminati.

Per la prima funzione:
$c_{-1} = 1, a_o = -\frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{12}, a_2 = \frac{1}{24}$

Per la seconda funzione
$c_{-1} = 1, a_1 = -\frac{1}{3}, a_3 = -\frac{1}{45}, a_5 = -\frac{2}{945}.$

Si noti che nello sviluppo della seconda funzione ci sono solo potenze dispari e dunque i coefficienti richiesti sono c_{-1}, a_1, a_3, a_5.

18.La funzione ha poli semplici in tutti i punti del tipo $z = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad n \in Z$ e in $z = 0$ ha una singolaritá non isolata in quanto
$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(2n+1)\pi} = 0.$

19. Scrivere la formula integrale di Cauchy con $\gamma = \gamma_R, \quad R < 1$ arbitrario e usare l'ipotesi:

$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} dz = \frac{1}{2\pi R^2} 2\pi R = \frac{1}{R}$. Passare poi al limite per R che tende a 1.

20. $e^{z^2} = \sum_0^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, \quad \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_0^{+\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) z^n,$

$\mathrm{sen}\,(\mathrm{z}^2) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{n}} \mathrm{z}^{2\mathrm{n}+1}}{(2\mathrm{n}+1)!}, \quad |\mathrm{z}| < 1.$

21. Osservare che si ha $|\mathrm{Re}(\mathrm{a_n})| \leq |\mathrm{a_n}|$ e usare la formula per il calcolo del raggio di convergenza, oppure usare il teorema del confronto per serie a termini reali non negativi.

22. Si osservi che $\frac{\mathrm{sen}\,(\mathrm{nz})}{2^{\mathrm{n}}} = \frac{1}{2i} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2^n} = \frac{1}{2i} \frac{e^{inx} e^{-ny} - e^{-inx} e^{ny}}{2^n}$ e si proceda come nell'esercizio 3.

23. $\frac{1}{8}, -1, 0$ (polo triplo il primo, poli semplici i secondi, polo doppio il terzo. Usare la formula per il calcolo del residuo quando si ha una singolaritá di tipo polo).

24. a) 0 (teorema dei residui, $c_{-1} = 0$),

b) 0 (non ci sono punti singolari all'interno del quadrato),

0 (non ci sono punti singolari all'interno della circonferenza),

$6\pi i$ (i punti singolari della funzione sono $z = 2k\pi i$, ma solo $z = 0, z = 2\pi i, z = -2\pi i$ cadono entro la circonferenza data. Teorema dei residui),

$-12\pi i$ (i punti singolari sono $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ma solo $z = +\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, -$ cadono entro la circonferenza data.Teorema dei residui),

a) 0 (z_o é polo doppio con residuo $c_{-1} = 0$)

b) 0 (z_o é polo doppio con residuo $c_{-1} = 0$).

25. $\frac{\pi}{2}$

(considerare la curva γ unione di una circonferenza di raggio $R > 0$ ci centro l'origine, due circonferenze di raggio $r > 0$ centrate in 1 e -1 e due segmenti. Applicando il teorema dei residui a questa curva si ha, poiché il residuo in z=0 vale 2π che $\int_\gamma \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}} = 2\pi$. Facendo tendere R a $+\infty$ e r a zero, gli integrali corrispondenti tendono a zero (lemma del grande e del piccolo cerchio), mentre i rimanenti tratti danno un contributo pari a $4\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$, da cui il risultato),

$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

(sostituendo nella funzione integranda cost $= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{it}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{it}}}{2}$ e dividendo e moltiplicando per ie^{it}, l'integrale si puó leggere come $\int_\gamma f(z)dz$ dove γ é la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e $f(z) = \frac{z}{i\,(4z+z^2+1)^2}$ e si puó calcolare con il teorema dei residui. Questa funzione ha due poli doppi entro la circonferenza unitaria, $z = -2+\sqrt{3}$ e $z = -2-\sqrt{3}$).

26. In entrambi i casi bisogna considerare l'integrale a valor principale, perché le funzioni non sono integrabili attorno ai loro punti singolari.

$PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)} = 0$ (osservare che $\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$ e che le tre funzioni sono dispari rispetto alle tre rette $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$)

$PV\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-i)^2(x-1)} = \frac{\pi}{2}$ (Si é scelto a=i. Si consideri la curva γ composta da una semicirconferenza di centro l'origine e raggio $R > 1$, da una semicirconferenza di raggio $r > 0$ centrata in 1 e dai due segmenti sull'asse reale di estremi -R , 1-r e 1+r , R . Si ha $\mathrm{res}(\mathrm{f}, \mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}$. Si applichi il teorema dei residui,poi si faccia tendere R a $+\infty$ e r a zero . Gli integrali corrispondenti tendono rispettivamente a zero e a $\mathrm{res}(\mathrm{f}, 1)\pi\mathrm{i} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\pi\mathrm{i} = -\frac{\pi}{2}$ per lemmi noti, da cui il risultato).

26.