METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Specialistica in Ingegneria Meccanica

Esame 11 febbraio 2009

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3 - 27i} dx$$

Soluzione
Usando il lemma di Jordan e il teorema dei residui, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3 - 27i} dx = 2\pi i \left(res\left(\frac{e^{iz}}{z^3 - 27i}, 3e^{i5\pi/6} \right) + res\left(\frac{e^{iz}}{z^3 - 27i}, 3e^{i\pi/6} \right) \right)$$
$$= \frac{4\pi i}{27} \left(\frac{e^{\frac{-3(1+i\sqrt{3})}{2}}}{1 - i\sqrt{3}} + \frac{e^{\frac{-3(1-i\sqrt{3})}{2}}}{1 + i\sqrt{3}} \right)$$

(bisogna trovare le tre radici cubiche di $27i$, prendere solo le due che hanno parte immaginaria positiva, osservare che sono poli semplici per la funzione e calcolare poi i relativi residui.)

E 2 Sia h un parametro reale positivo. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $f_h(t)$ definita da:

$$f_h(t) = \begin{cases} -\frac{3}{h} & 0 \leq t < h \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare poi il limite di tale trasformata al tendere di h a zero.

Facoltativo: individuare $\lim_{h \to 0} f_h(t)$ per t ≥ 0.

Soluzione

$$L[f_h(t)](s) = 3(\frac{e^{-sh} - 1}{sh})$$

$$\lim_{h \to 0} L[f_h(t)](s) = -3$$

$$\lim_{h \to 0} f_h(t) = \begin{cases} -\infty & t = 0 \\ \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

E 3

Sia c un parametro reale e positivo. Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su R la funzione

$$x \in (-\pi, \pi] \to e^{\max\{\frac{1}{\pi}, c\}x}$$

Determinare la serie di Fourier di f .

Soluzione

Se $c > \frac{1}{\pi}$ allora la serie vale

$$\frac{\sinh c\pi}{\pi c} + \frac{2}{\pi} \sinh c\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + c^2}(c \cos kx - k \sin kx)$$

Se $c \leq \frac{1}{\pi}$ allora la serie vale

$$\sinh 1 + \frac{2}{\pi} \sinh 1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + (1/\pi^2)}(\frac{1}{\pi} \cos kx - k \sin kx)$$

Nome e Cognome ________________________________ **matricola** ________________ 2.4

D 1

(i) Dare la definizione di funzione derivabile in campo complesso in un punto $z_0 \in C$. Enunciare la condizione necessaria e sufficiente per la derivabilitá in z_0.

(i) Usando la condizione precedentemente enunciata, data la funzione

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

con $u(x, y) = y^2 senx$, trovare, se esiste, una funzione $v(x, y)$ in modo tale che $f(x, y)$ risulti olomorfa in tutto il campo complesso.

Soluzione (ii) Non esiste una tale funzione (usare le condizioni di Cauchy-Riemann)

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ____________________ 2.5

D 2

(i) Serie di Taylor. Criterio di sviluppabilità. Esempi.

(ii) Teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier (solo enunciato).