SOLUZIONI DELLA PROVA DEL 07-09-09

E 1 Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{1}{1-2\cos(z)}dz,$$

dove γ è la curva bordo dell'insieme T definito da $T = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \le 1, |x| \le 2\pi\}$.

I punti singolari della funzione sono dati da $\cos z = \frac{1}{2}$, dunque $z = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. I punti che cadono all'interno della curva γ sono:

$$z = \frac{\pi}{3}, \quad z = -\frac{\pi}{3}, \quad z = \frac{5}{3}\pi, \quad z = -\frac{5}{3}\pi.$$

Questi quattro punti sono poli semplici. Si applica il teorema dei residui:

$$\int_\gamma \frac{1}{1-2\cos(z)}dz = 2\pi i\left[\text{res}\left(\frac{1}{1-2\cos(z)}, \frac{\pi}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\text{res}\left(\frac{1}{1-2\cos(z)}, -\frac{\pi}{3}\right)+\text{res}\left(\frac{1}{1-2\cos(z)}, \frac{5}{3}\pi\right)++\text{res}\left(\frac{1}{1-2\cos(z)}, -\frac{5}{3}\pi\right)\right].$$

Calcoliamo i residui:

$$\text{res}\left(\frac{1}{1-2\cos(z)}, \pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sin z}\ |_{z=\pm\frac{\pi}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\text{res}\left(\frac{1}{1-2\cos(z)}, \pm\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2\sin z}\ |_{z=\pm\frac{5}{3}\pi} = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto:

$$\int_\gamma \frac{1}{1-2\cos(z)}dz = 0.$$

E 2 Usando la trasformata di Laplace, trovare il valore del parametro reale α in modo che la soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} y'(t) - y(t) = \sin t, & t \ge 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

verifichi $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, si ha:

$$sY(s) - \alpha - Y(s) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Dunque:

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \frac{1}{(s^2+1)(s-1)} = \frac{\alpha}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) e^t - \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t.$$

Imponendo la condizione $y(0) = \alpha$, si ricava:

$$\alpha = \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}.$$

E 3 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicità su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \max\{2, 2-x\}, \quad x \in (-\pi, \pi].$$

Determinare la serie di Fourier di f.

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Osserviamo che:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x \in (-\pi, 0) \\ 2, & x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Dunque:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2 - x dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2dx = \frac{\pi}{2} + 4.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (2-x)\cos(kx)dx + \int_{0}^{\pi} 2\cos(kx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1].$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(2-x)\mathrm{sen}(kx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\mathrm{sen}(kx)dx = \frac{1}{k}(-1)^k.$$

La serie di Fourier richiesta è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+4\right) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{\pi k^2}[(-1)^k - 1]\cos(kx) + \frac{1}{k}(-1)^k\mathrm{sen}(kx)\right].$$

D 1 Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della seguente funzione:

$$f(z) = z^3\cos\left(\frac{1}{z^4}\right) + \frac{1}{1-z}$$

precisando l'insieme in cui vale. Individuare la parte regolare e la parte singolare dello sviluppo, dire di che tipo di singolarità si tratta e quanto vale il residuo di $f(z)$ in z_0.

Per $0 < |z| < 1$, risulta:

$$f(z) = z^3\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{z^{8n}}\cdot\frac{1}{(2n)!}\right] + \sum_{n=0}^{+\infty} z^n =$$

$$z^3 - \frac{1}{2z^5} + \frac{1}{z^{13}}\cdot\frac{1}{4!} + \ldots + 1 + z + z^2 + \ldots$$

Dunque, la parte regolare è:

$$1 + z + z^2 + 2z^3 + z^4 + \ldots;$$

la parte singolare è:

$$-\frac{1}{2z^5} + \frac{1}{z^{13}}\cdot\frac{1}{4!} + \ldots$$

Il punto $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale (ci sono infatti infiniti termini nella parte singolare) e il residuo, che é pari al coefficiente c_{-1}, vale zero.