SOLUZIONI DELLA PROVA DEL 26-06-09

E 1 Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(iz)} dz,$$

dove γ è la frontiera dell'insieme $\{z \in C : |Re(z)| \leq 2, -1 \leq Im(z) \leq 4\}$.

I punti singolari della funzione sono dati da:

$$\sin(iz) = 0 \Rightarrow iz = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Per $k = 0$ e $k = -1$ i punti cadono all'interno della curva γ e sono poli semplici. Si applica il teorema dei residui:

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(iz)} dz = 2\pi i \left[\text{res} \left(\frac{1}{\sin(iz)}, 0 \right) + \text{res} \left(\frac{1}{\sin(iz)}, i\pi \right) \right].$$

Calcoliamo i residui:

$$\text{res} \left(\frac{1}{\sin(iz)}, 0 \right) = \frac{1}{i} \lim_{z \to 0} \frac{1}{\sin(iz)} iz = \frac{1}{i} = -i;$$

$$\text{res} \left(\frac{1}{\sin(iz)}, i\pi \right) = \lim_{z \to i\pi} \frac{1}{\sin(iz)} (z - i\pi) = -\frac{1}{i} \lim_{z \to i\pi} \frac{1}{\sin(iz + \pi)} (iz + \pi) = -\frac{1}{i} = i.$$

Dunque:

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin(iz)} dz = 0.$$

E 3 Sia f la funzione periodica di periodo 2π ottenuta prolungando per periodicitá su $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ -3x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}. \tag{1}$$

Determinare la serie di Fourier di f .

La serie di Fourier è data da

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx) \right],$$

dove:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, 2, ...$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(kx)dx, k = 0, 1, 2, ...$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della f.

$$a_0 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 3xdx = -\frac{3}{2}\pi;$$

$$a_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = -\frac{3}{\pi}\left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2}\right];$$

$$b_k = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx = -\frac{3}{k}(-1)^{k+1} = \frac{3}{k}(-1)^k.$$

Pertanto la serie di Fourier richiesta è:

$$-\frac{3\pi}{4} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + 3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin(kx)}{k}.$$

Poichè f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$ distinti da $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, dal teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier la serie converge ad f in tali punti. Notiamo che, se $x = \pi$, la serie si riduce a :

$$-\frac{3\pi}{4} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Questa somma vale:

$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

D 2 (iii) Provare che la funzione e^s $(s \in C)$ non é trasformata di Laplace di alcun segnale $f(t)$.

e^s non è trasformata di Laplace di alcun segnale $f(t)$ perchè non è limitata in alcun semipiano $Re(s) \geq \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Infatti $|e^s| = e^{Re(s)}$.

E 3 Individuare l'insieme di convergenza assoluta e totale della seguente serie in campo complesso:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inz}2^n}{n^2}.$$

Dire se nell'insieme di convergenza la somma della serie è funzione olomorfa.

Posto $e^{iz} = w$ e $z = x + iy$, la serie assegnata diventa una serie di potenze centrata in $w = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n2^n}{n^2},$$

il cui raggio di convergenza vale $\frac{1}{2}$. La serie converge assolutamente (e dunque puntualmente) per $|w| = \left|e^{iz}\right| = e^{-y} < \frac{1}{2}$, cioè per $y > \log 2$. La convergenza è totale per $y \geq \log 2$, perchè:

$$\sup_{|w| \leq \frac{1}{2}} \frac{|w^n|\,|2^n|}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. La somma è funzione olomorfa per $y > \log 2$ perchè la somma di una serie di potenze è funzione olomorfa nel cerchio di convergenza.