Compito 1 del 27 marzo 2006

E.1

L'integrale si calcola molto velocemente facendo uso del teorema dei residui. Si individuino le singolaritá della funzione integranda: sono date dalle radici dell'equazione $z^4 = 1$ che sono date da

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}} \tag{1}$$

Applicando il lemma di Jordan si scelgono i soli punti che cadono nel semipiano $Im\, z > 0$. Si ha quindi

$$res\left(\frac{e^{i\omega z}}{x^4+1}, z_1\right) = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}(1+i)\omega}{2}}}{2\sqrt{2}(1+i)}$$
$$res\left(\frac{e^{i\omega z}}{x^4+1}, z_2\right) = \frac{e^{-\frac{\sqrt{2}(i-1)\omega}{2}}}{2\sqrt{2}(i-1)}$$

L'integrale é dato dalla somma dei residui testé calcolati

E.2

La serie pu essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^{2n}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+2)^{n+1}}{n+1} \tag{2}$$

per $0 < |z+2| < 1$. La singolaritá nel punto -2 é essenziale ed il residuo in quel punto nullo.

E.3

In primo luogo conviene calcolare il limite della successione

$$f(x,y) = 1 \;se\;\; (x,y) = (0,0)$$
$$f(x,y) = 0 \;se\;\; (x,y) \neq (0,0).$$

Quindi la successione converge in tutto R^2, ma non uniformemente. La convergenza uniforme si ha invece all'esterno di qualunque cerchio centrato nell'origine di raggio arbitrario. Infatti, posto per brevitá $x^2 + y^2 = t$, si ha

$$f_n'(t) = -\frac{n}{(1+nt)^2} < 0$$
$$sup_{0\le\delta\le t} f_n(t) = \frac{1}{1+n\delta}$$

D.1

Si ha che sin(2z) e 2sinz cosz sono due funzioni analitiche che coincidono su R, dunque la loro differenza é identicamente nulla sulla retta reale. Poiché quest'ultima non é costituita interamente da punti isolati, dal punto i), si deduce che la differenza é identicamente nulla nel piano complesso e dunque che le due funzioni coincidono.

D.2

L'antitrasformata di Laplace data da

$$f(t) = \frac{e^{3t} - 4te{-}t - e{-}t}{16}, \tag{3}$$

infatti $F(s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ per $s \to \infty$ ed olomorfa per $Re(s) > 3$. Si puó usare il teorema dei residui per calcolare l'antitrasformata

$$f(t) = res(e^{st}F(s), -1) + res(e^{st}F(s), 3) = \frac{-(4t+1)e^{-t}}{16} + \frac{e^{3t}}{16} \tag{4}$$