1 Compito 1 del 1 luglio 2008

E.1

Per ogni $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^k} sen \frac{1}{z},$$

si riduce all'unico punto $z = 0$, che e' una singolarita' essenziale. Infatti

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1+k}} =$$

$$= \frac{1}{z^{1+k}} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^{3+k}} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^{5+k}} - \dots .$$

Allora se $k = 0$ si ha $res(f, 0) = 1$ e se $k > 0$ si ha $res(f, 0) = 0$.

E.2

Per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\, dx$$

si considera la funzione $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2}$ per $z \in C$ e si usa il Lemma del grande cerchio. Infatti l'ipotesi $\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0$ e' soddisfatta. Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\, dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} \frac{z^2}{(z^2+4)^2}\, dz = 2\pi i \; res\left(\frac{z^2}{(z^2+4)^2}, 2i\right),$$

dove γ_r e' la curva ottenuta concatenando il segmento $(-r, r)$, per $r > 2$, con la semicirconferenza $\gamma(t) = re^{it}$, per $0 \le t \le \pi$ e $2i$ e' la singolarita' interna a γ_r. Poiche'

$$res\left(\frac{z^2}{(z^2+4)^2}, 2i\right) = \lim_{z \to 2i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+2i)^2} = -\frac{i}{8},$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\, dx = -2\pi i \frac{i}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

E.3

La serie in campo complesso ($z \in C$)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikz^2}}{k^3}$$

puo' essere vista come la serie di potenze (con raggio di convergenza 1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k^3}$$

ponendo $t = e^{iz^2}$ e quindi converge puntualmente e assolutamente per $|t| \leq 1$ e non converge per $|t| \leq 1$. Inoltre essa converge totalmente (e quindi puntualmente, assolutamente e uniformemente) per

$$|e^{ikz^2}| \leq 1.$$

Poiche' $e^{ikz^2} = e^{ik(x^2-y^2+2ixy)} = e^{-2kxy+ik(x^2-y^2)}$, allora si ha

$$|e^{ikz^2}| = e^{-2kxy} \leq 1 \qquad sse \qquad xy \geq 0$$

e cio' equivale a dire che $z = x + iy$ deve stare nel 1^0 e nel 3^0 quadrante con gli assi inclusi.

D.1

(ii) Poiche' per $|z| \leq 1$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$$

si ha che

$$f(z) = \frac{7z^4}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 7nz^{n+3}.$$

D'altra parte

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

e quindi per l'unicita' dello sviluppo di Taylor si ha

$$\frac{f^{(20)}(0)}{(20)!} = 7 \cdot 17$$

e quindi

$$f^{(20)}(0) = 119 \cdot (20)!$$

D.2

(ii) Basta considerare una funzione che e' nulla al di fuori di un intervallo limitato (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, per esempio

$$f(t) = H(t) - H(t-1).$$

2 Compito 2 del 1 luglio 2008

E.1

Per ogni $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ l'insieme dei punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^k} arctgz,$$

si riduce all'unico punto $z = 0$, che e' un polo di ordine $k-1$ per $k > 1$ e una singolaritá eliminabile per $k = 0$ e $k = 1$ Infatti

$$f(z) = \frac{1}{z^k} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)} z^{2n+1-k} =$$

$$= z^{1-k} - \frac{1}{3!} z^{3-k} + \frac{1}{5!} z^{5-k} \dots .$$

Allora, se $k = 0$ o $k = 1$ o $k > 1$ con k dispari, si ha $res(f, 0) = 0$, mentre se $k > 1$ con k pari si ha $res(f, 0) = \frac{(-1)^{\frac{k-2}{2}}}{k-1}$

E.2

Per calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\, dx$$

si considera la funzione $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)^2}$ per $z \in C$ e si usa il Lemma del grande cerchio. Infatti l'ipotesi $\lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = 0$ e' soddisfatta. Quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\, dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_r} \frac{z^2}{(z^2+9)^2}\, dz = 2\pi i \; res\left(\frac{z^2}{(z^2+9)^2}, 3i\right),$$

dove γ_r e' la curva ottenuta concatenando il segmento $(-r, r)$, per $r > 3$, con la semicirconferenza $\gamma(t) = re^{it}$, per $0 \le t \le \pi$ e $3i$ e' la singolarita' interna a γ_r. Poiche'

$$res\left(\frac{z^2}{(z^2+9)^2}, 3i\right) = \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+3i)^2} = -\frac{i}{12},$$

si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\, dx = -2\pi i \frac{i}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

E.3

La serie in campo complesso ($z \in C$)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-ikz^2}}{k^3}$$

puo' essere vista come la serie di potenze (con raggio di convergenza 1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k^3}$$

ponendo $t = e^{-iz^2}$ e quindi converge puntualmente e assolutamente per $|t| < 1$ e non converge per $|t| > 1$. Inoltre essa converge totalmente (e quindi puntualmente, assolutamente e uniformemente) per

$$|e^{-ikz^2}| \le 1.$$

Poiche' $e^{-ikz^2} = e^{-ik(x^2+y^2+2ixy)} = e^{2kxy-ik(x^2-y^2)}$, allora si ha

$$|e^{-ikz^2}| = e^{2kxy} \leq 1 \qquad sse \qquad xy \leq 0$$

e cio' equivale a dire che $\; z = x + iy \;$ deve stare nel 2^0 e nel 4^0 quadrante con gli assi inclusi.

D.1

(ii) Poiche' per $|z| \leq 1$

$$\frac{1}{(z-1)^2} = -D\frac{1}{z-1} = D\left(\frac{1}{1-z}\right) = D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$$

si ha che

$$f(z) = \frac{5z^3}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 5nz^{n+2}.$$

D'altra parte

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

e quindi per l'unicita' dello sviluppo di Taylor si ha

$$\frac{f^{(18)}(0)}{(18)!} = 5 \cdot 16$$

e quindi

$$f^{(18)}(0) = 80 \cdot (18)!$$

D.2

(ii) Basta considerare una funzione che e' nulla al di fuori di un intervallo limitato (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, per esempio

$$f(t) = H(t) - H(t-1).$$