1 Compito 1 del 3 febbraio 2010

E.1

Ponendo $\frac{e^{iz}}{e} = t$, la serie diventa una serie geometrica di ragione t che converge assolutamente per $|t| < 1$ e totalmente per $|t| \leq a < 1$. Dunque, ricordando che, per $z = x+iy$, si ha $|e^{iz}| = e^{-y}$, la serie iniziale convergerá assolutamente nel semipiano $y > -1$ e totalmente in tutti i semipiani $y \geq b > -1$. La somma della serie é $S(z) = \frac{e}{e-e^{iz}}$

E.2

Il punto π é un polo semplice per la funzione integranda con residuo uguale a 1 e cade all'interno dell'insieme A. Per il teorema dei residui, si ha che l'integrale é pari a $2\pi i$.

E.3

La trasformata del prodotto di convoluzione é il prodotto delle trasformate e $L[y'(t)](s) = sL[y't)](s) - y(0)$. Applicando queste proprietá e antitrasformando, si ha $y(t) = 4H(t)e^t(1-t)$, con $H(t)$ gradino unitario.

D.1

(ii) La funzione é olomorfa in $C - \{i\}$ e il semipiano in questione é aperto semplicemente connesso contenuto in $C-\{i\}$, dunque f(z) ammette primitiva in $Im(z) < 1$. Una primitiva é $F(z) = Log(z-i)$ (determinazione principale).

(iii) In $C - \{i\}$ (cosí come in ogni $B^*(i,r)$, intorno forato di centro i e raggio r) la funzione non ammette primitiva perché, come facilmente si verifica, $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$ per ogni circonferenza γ di centro i contenuta in $C - \{i\}$ (o in $B^*(i,r)$). Se ammettesse primitiva, l'integrale su ogni curva chiusa regolare dovrebbe essere nullo.

D.2

Sommabile per $\alpha > -2$, regolare a tratti per $\alpha \geq 2$ e per $\alpha = 0$.

2 Compito 2 del 3 febbraio 2010

E.1

Ponendo $\frac{e^{-iz}}{2} = t$, la serie diventa una serie geometrica di ragione t che converge assolutamente per $|t| < 1$ e totalmente per $|t| \leq a < 1$. Dunque, ricordando che, per $z = x + iy$, si ha $|e^{-iz}| = e^y$, la serie iniziale convergerá assolutamente nel semipiano $y < log2$ e totalmente in tutti i semipiani $y \leq b < log2$. La somma della serie é $S(z) = \frac{2}{2-e^{-iz}}$.

E.2

Il punto $-3i$ é un polo semplice per la funzione integranda con residuo uguale a 1 e cade all'interno dell'insieme A. Per il teorema dei residui, si ha che l'integrale é pari a $2\pi i$.

E.3

La trasformata del prodotto di convoluzione é il prodotto delle trasformate e $L[y'(t)](s) = sL[y't)](s) - y(0)$. Applicando queste proprietá e antitrasformando, si ha $y(t) = H(t) + \frac{t^2}{2}$, con $H(t)$ gradino unitario.

D.1

(ii) La funzione é olomorfa in $C - \{2i\}$ e il cerchio in questione é aperto semplicemente connesso contenuto in $C - \{2i\}$, dunque f(z) ammette primitiva in $|z + 1| < 1$. Una primitiva é $F(z) = Log(z - 2i)$ (determinazione principale).

(iii) In $C - \{2i\}$ (cosí come in ogni $B^*(2i, r)$, intorno forato di centro i e raggio r) la funzione non ammette primitiva perché, come facilmente si verifica, $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$ per ogni circonferenza γ di centro 2i contenuta in $C - \{2i\}$ (o in $B^*(2i, r)$). Se ammettesse primitiva, l'integrale su ogni curva chiusa regolare dovrebbe essere nullo.

D.2

Sommabile per $\alpha > -3$, regolare a tratti per $\alpha \geq 3$ e per $\alpha = 0$.