1 Compito 1 del 5 Dicembre 2007

E.1

La funzione e' definita per $z \neq 1$ e dunque l'insieme di definizione e' $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$. L'aperto di olomorfia si trova imponendo

$$i(z-1) = i(x-1) - y \notin \bar{\mathbb{R}}_- = (-\infty, 0],$$

e dunque e'

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x = 1, y \geq 0\}.$$

Tale insieme e' semplicemente connesso e quindi la funzione vi ammette primitiva.

E.2

Trasformando l'equazione si trova

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-3 + s^2}{s^2(s^2 - 5s + 4)}.$$

Per antitrasformare si possono utilizzare i residui:

$$res\left(\frac{-3+s^2}{s^2(s^2-5s+4)}e^{st}, 1\right) = \frac{2}{3}e^t;$$

$$res\left(\frac{-3+s^2}{s^2(s^2-5s+4)}e^{st}, 4\right) = \frac{13}{48}e^{4t};$$

$$res\left(\frac{-3+s^2}{s^2(s^2-5s+4)}e^{st}, 0\right) = \frac{-12t-15}{16}.$$

La soluzione e' dunque

$$y(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{13}{48}e^{4t} + \frac{-12t-15}{16}.$$

(Alla stessa conclusione si puo' arrivare considerando la decomposizione in fratti semplici della trasformata e antitrasformando oppure utilizzando la convoluzione).

E.3

Limite puntuale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{n(y-x)}+2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & y-x<0 \\ \\ \frac{1}{3} & y-x=0 \\ \\ 0 & y-x>0 \end{cases} .$$

Convergenza uniforme: la convergenza non puo' essere uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto il limite puntuale e' discontinuo. Una regione di convergenza uniforme e' $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y-x \geq a > 0\}$, infatti

$$\sup_I |f_n(x,y) - f(x,y)| = \sup_I \frac{1}{e^{n(y-x)}+2} = \frac{1}{e^{na}+2}$$

che e' infinitesimo per $n \to +\infty$.
Si puo' anche scegliere il caso $y-x<0$. Inoltre c'e' convergenza uniforme anche su $y-x=0$.

D.1

(ii) La funzione e' la trasformata di un segnale continuo poiche' e' olomorfa nel semipiano $Re(z) > 0$ e $F(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right)$ per $|z| \to +\infty$.

D.2

(ii) La funzione ha una singolarita' in $z=2$. Si puo' scegliere come γ_1 una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $r<2$. La curva e' dunque definita da

$$\gamma_1 = re^{it} \qquad r<2,\ t \in (0,2\pi)$$

oppure da

$$|z| \leq r \qquad r<2.$$

Si puo' scegliere come γ_2 una circonferenza centrata in 2 e di raggio r arbitrario. La curva e' dunque definita da

$$\gamma_2 = 2 + re^{it} \qquad r \in \mathbb{R}_+, \; t \in (0, 2\pi)$$

oppure da

$$|z-2| \leq r \qquad r \in \mathbb{R}_+.$$

2 Compito 2 del 5 Dicembre 2007

E.1

La funzione e' definita per $z \neq 2$ e dunque l'insieme di definizione e' $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 2\}$. L'aperto di olomorfia si trova imponendo

$$i(2-z) = i(2-x) + y \notin \bar{\mathbb{R}}_- = (-\infty, 0],$$

e dunque e'

$$\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x = 2, y \leq 0\}.$$

Tale insieme e' semplicemente connesso e quindi la funzione vi ammette primitiva.

E.2

Trasformando l'equazione si trova

$$\mathcal{L}(y) = \frac{2+s^2}{s^2(s^2+6s+5)}.$$

Per antitrasformare si possono utilizzare i residui:

$$res\left(\frac{2+s^2}{s^2(s^2+6s+5)}e^{st}, -1\right) = \frac{3}{4}e^{-t};$$

$$res\left(\frac{2+s^2}{s^2(s^2+6s+5)}e^{st}, -5\right) = -\frac{27}{100}e^{-5t};$$

$$res\left(\frac{2+s^2}{s^2(s^2+6s+5)}e^{st},0\right)=\frac{10t-12}{25}.$$

La soluzione e' dunque

$$y(t)=\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{27}{100}e^{-5t}+\frac{10t-12}{25}.$$

(Alla stessa conclusione si puo' arrivare considerando la decomposizione in fratti semplici della trasformata e antitrasformando oppure utilizzando la convoluzione).

E.3

Limite puntuale:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5+e^{n(x+y)}}=\begin{cases}\frac{1}{5} & y+x<0\\ \\ \frac{1}{6} & y+x=0\\ \\ 0 & y+x>0\end{cases}.$$

Convergenza uniforme: la convergenza non puo' essere uniforme su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto il limite puntuale e' discontinuo. Una regione di convergenza uniforme e' $I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq a>0\}$, infatti

$$\sup_I|f_n(x,y)-f(x,y)|=\sup_I\frac{1}{5+e^{n(x+y)}}=\frac{1}{5+e^{na}}$$

che e' infinitesimo per $n\to+\infty$.
Si puo' anche scegliere il caso $y+x<0$. Inoltre c'e' convergenza uniforme anche su $y+x=0$.

D.1

(ii) La funzione non puo' essere la trasformata di un segnale continuo poiche' non e' limitata. Si ricordi che condizione necessaria affinche' una funzione sia la trasformata di un segnale continuo e' che risulti limitata in ogni semipiano $Re(z) \geq \sigma_0 > \sigma[f]$.

D.2

(ii) La funzione ha una singolarita' in $z = 4$. Si puo' scegliere come γ_1 una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $r < 4$. La curva e' dunque definita da

$$\gamma_1 = re^{it} \qquad r < 4,\ t \in (0, 2\pi)$$

oppure da

$$|z| \leq r \qquad r < 4.$$

Si puo' scegliere come γ_2 una circonferenza centrata in 4 e di raggio r arbitrario. La curva e' dunque definita da

$$\gamma_2 = 4 + re^{it} \qquad r \in \mathbb{R}_+,\ t \in (0, 2\pi)$$

oppure da

$$|z - 4| \leq r \qquad r \in \mathbb{R}_+.$$