document **Compito 1**

E1 La funzione $f(x)$ é periodica (periodo 2π) e continua in tutto R e dunque di quadrato sommabile in $(-\pi,\pi]$ ($\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{3}\pi^2 < +\infty$), quindi vale l'uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Osservando che $a_0 = \pi$, $b_n = 0$, $a_n = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$ si ottiene l'uguaglianza richiesta.

E2 La trasformata di un prodotto di convoluzione é il prodotto delle trasformate:

$$L[(sent)_+ * (e^{\pi t})_+] = \frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s-\pi}$$

e dunque, antitrasformando, si ha

$$(sent)_+ * (e^{\pi t})_+ = \frac{1}{\pi^2+1}(-cost - \pi sent + e^{\pi t})$$

E3

Il raggio di convergenza é $+\infty$, dunque la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) $\forall z \in C$ e totalmente in ogni cerchio chiuso di centro $z = 2$ del piano complesso (cioé in tutti gli insiemi del tipo $\{z \in C : |z-2| \leq a, a > 0\}$.

La somma é $e^{e^i(z-2)} - 1$ (ricordare lo sviluppo dell'esponenziale in campo complesso e sottrarre il primo termine, visto che la somma parte da $n = 1$).

1: ii) La funzione in questione é analitica e ha come insieme di zeri tutto l'asse reale che non é un insieme interamente costituito da punti isolati. Dunque l'unica possibitá é che sia identicamente nulla.

D2: ii) La funzione é definita e olomorfa in C^* . Poiché una funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso ammette primitiva, basta scegliere un qualunque aperto semplicemente connesso contenuto in C^*, per esempio C^{**} o un cerchio qualunque contenuto in C^*.

Compito 2

E1 La funzione $f(x)$ é periodica (periodo 2π) e continua a tratti in R e dunque di quadrato sommabile in $(-\pi,\pi]$ ($\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{3}\pi^2 < +\infty$), quindi vale l'uguaglianza di Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = a_0^2/2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Osservando che $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$ si ottiene l'uguaglianza richiesta.

E2 La trasformata di un prodotto di convoluzione é il prodotto delle trasformate:

$$L[(cost)_+ * (e^{\sqrt{2}t})_+] = \frac{2}{s^2+1}\frac{1}{s- \ sqrt2}$$

e dunque, antitrasformando, si ha

$$(cost)_+ * (e^{\sqrt{2}t})_+ = \frac{1}{3}(-\sqrt{2}cost + sent + \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t})$$

E3

Il raggio di convergenza é $+\infty$, dunque la serie converge assolutamente (e quindi puntualmente) $\forall z \in C$ e totalmente in ogni cerchio chiuso di centro $z = 3$ del piano complesso (cioé in tutti gli insiemi del tipo $\{z \in C : |z-3| \leq a, a > 0\}$.

La somma é $e^{e^i(z-3)} - 1$ (ricordare lo sviluppo dell'esponenziale in campo complesso e sottrarre il primo termine, visto che nella somma l'indice corrente é $n+1$ invece che $n = 1$).

1: ii) La funzione in questione é analitica e ha come insieme di zeri tutto l'asse reale che non é un insieme interamente costituito da punti isolati. Dunque l'unica possibitá é che sia identicamente nulla.

D2: ii) La funzione é definita e olomorfa in C^* . Poiché una funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso ammette primitiva, basta scegliere un qualunque aperto semplicemente connesso contenuto in C^*, per esempio C^{**} o un cerchio qualunque contenuto in C^*.