1 Compito 1 del 9 Gennaio 2008

E.1

Lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z) = \frac{1}{z^3} Log(1 + iz^2)$ e'

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} z^{2n-1}$$

e vale nella palla forata $0 < |z| < 1$. La parte singolare e' $\dfrac{i}{z}$ e la parte regolare e'

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} z^{2n-1}.$$

E.2

Trasformando l'equazione si trova

$$\mathcal{L}(sen(t))\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(t^2).$$

Da cui si ricava

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{2s^2+2}{s^3} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s^3}.$$

Antitrasformando si ha $y(t) = 2 + t^2$.

E.3

Si utilizza lo sviluppo in serie del seno ricordando che la convergenza e' uniforme su tutto R e quindi in particolare su $[1, 2]$. Percio' si puo' integrare per serie e si ha:

$$\int_1^2 sen((x-2)^2)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_1^2 ((x-2)^2)^{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{4n+3}.$$

D.1

(ii) Le singolarita' di $f(z)$ sono $z_0 = 0$ e $z_k = 2k\pi i$. Fra queste, quelle interne alla curva γ sono $z_0 = 0$ e $z_1 = 2\pi i$ e sono poli semplici. Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$res(f(z), z_0) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

e

$$res(f(z), z_1) = \lim_{z\to 2\pi i} \frac{z - 2\pi i}{e^z - 1} = \lim_{z\to 2\pi i} \frac{z - 2\pi i}{e^{z-2\pi i} - 1} = 1.$$

Si conclude, utilizzando il teorema dei residui, che

$$\int_\gamma \frac{1}{e^z - 1}\, dz = 4\pi i.$$

D.2

(i) La funzione e' regolare a tratti per $\alpha = 0$ e $\alpha \geq 1$ ed e' di quadrato sommabile per $\alpha > -\frac{1}{2}$.

(ii) Per $\alpha = 0$ e $\alpha \geq 1$ la somma e':

$$S(x) = \begin{cases} f(t) & se \quad t \neq 2k\pi \\ \dfrac{(2\pi)^\alpha}{2} & se \quad t = 2k\pi. \end{cases}$$

2 Compito 2 del 9 Gennaio 2008

E.1

Lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z) = \frac{1}{z^2} Log(1 + iz)$ e'

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} z^{n-1}$$

e vale nella palla forata $0 < |z| < 1$. La parte singolare e' $\dfrac{i}{z}$ e la parte regolare e'

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{i^{n+1}}{n+1} z^{n-1}.$$

E.2

Trasformando l'equazione si trova

$$\mathcal{L}(e^t)\mathcal{L}(y(t)) = \mathcal{L}(t).$$

Da cui si ricava

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}.$$

Antitrasformando si ha $y(t) = 1 - t$.

E.3

Si utilizza lo sviluppo in serie dell'esponenziale ricordando che la convergenza e' uniforme su tutto R e quindi in particolare su $[1, 2]$. Percio' si puo' integrare per serie e si ha:

$$\int_1^2 e^{-(x-1)^2}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^2 ((x-1)^2)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2n+1}.$$

D.1

(ii) Le singolarita' di $f(z)$ sono $z_0 = 0$ e $z_k = k\pi$. Fra queste, quelle interne alla curva γ sono $z_0 = 0$ e $z_1 = \pi$ e sono poli semplici. Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$res(f(z), z_0) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{sen(z)} = 1$$

e

$$res(f(z), z_1) = \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{sen(z)} = \lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{-sen(z-\pi)} = -1.$$

Si conclude, utilizzando il teorema dei residui, che

$$\int_\gamma \frac{1}{sen(z)}\,dz = 0.$$

D.2

(i) La funzione e' regolare a tratti per $\alpha = 0$ e $\alpha \leq -1$ ed e' di quadrato sommabile per $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

(ii) Per $\alpha = 0$ e $\alpha \leq -1$ la somma e':

$$S(x) = \begin{cases} f(t) \quad se \;\; t \neq 2k\pi \\ \dfrac{1}{2(2\pi)^\alpha} \quad se \;\; t = 2k\pi. \end{cases}$$