Compito 1

E1

Osservare che $f(z) = (Logz)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}} Log(Logz)}$

Insieme di definizione: $C - \{z = 0, z = 1\}$. Nel punto $z = 1$ la funzione é prolungabile essendo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ un numero reale positivo.

Aperto di olomorfia: $C - \{z = x + iy : \quad y = 0, \quad x \leq 1\}$. Infatti vanno esclusi sia i punti in cui z é reale negativo o nullo che quelli in cui $Logz$ é reale negativo o nullo.

E2

Le due regioni sono $|z| < 5$ e $|z| > 5$.

In $|z| < 5$ si ha

$$\frac{z^3}{5 - z} = \frac{z^3}{5(1 - z/5)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+3}}{5^{n+1}}$$

In $|z| > 5$ si ha

$$\frac{z^3}{5 - z} = -\frac{z^3}{z(1 - 5/z)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{z^{n-2}}$$

E3

La successione converge in tutto R alla funzione identicamente nulla.

La successione converge anche uniformemente in tutto R. Infatti

$$\sup_{x \in R} |f_n(x)| = \max_{x \in [0, +\infty)} f_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

(osservare che la funzione $f_n(x)$ é dispari e il suo punto di massimo in $[0, +\infty)$ é $x = 1/n$)
Inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$$

.

D1: ii) Applicando il teorema dei residui e il lemma di Jordan si ha che il valore dell'integrale é

$$2\pi i \; res(\frac{e^{iz}}{z - (1+i)}, 1 + i) = 2\pi i e^{i(1+i)}$$

D2: ii) La funzione ha periodo 1. Applicando la formula della trasformata di un segnale periodico si ha:

$$L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^1 e^{-st} t \, dt = \frac{1}{1 - e^{-s}} \big(- \frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} \big)$$

Compito 2

E1 Osservare che $f(z) = (Log(2z))^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}} Log(Log(2z))$

Insieme di definizione: $C - \{z = 0, z = 1/2\}$. Nel punto $z = 1/2$ la funzione é prolungabile essendo $\sqrt{3}$ un numero reale positivo.

Aperto di olomorfia: $C - \{z = x + iy : \quad y = 0, \quad x \leq 1/2\}$. Infatti vanno esclusi sia i punti in cui z é reale negativo o nullo che quelli in cui $Log(2z)$ é reale negativo o nullo.

E2

Le due regioni sono $|z| < 3$ e $\quad |z| > 3$.

In $|z| < 3$ si ha

$$\frac{z^4}{z-3} = \frac{z^4}{-3(1-z/3)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+4}}{3^{n+1}}$$

In $|z| > 3$ si ha

$$\frac{z^3}{5-z} = \frac{z^4}{z(1-3/z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n-3}}$$

E3

La successione converge in $(0, +\infty)$ alla funzione identicamente nulla (notare che per $x \leq 0$ la successione tende a $+\infty$)

La successione non converge uniformemente in tutto $(0, +\infty)$. Infatti

$$\sup_{x \in (0,+\infty)} f_n(x) = n$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

(osservare che la funzione $f_n(x)$ é decrescente)

Converge uniformemente in ogni intervallo $(a, +\infty)$ con $a > 0$. Infatti

$$\sup_{x \in (a,+\infty)} f_n(x) = ne^{-na}$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} ne^{-na} = 0$$

D1: ii) Applicando il teorema dei residui e il lemma di Jordan si ha che il valore dell'integrale é

$$2\pi i \; res(\frac{e^{iz}}{z + (1+i)}, -1-i) = 2\pi i e^{-i(1+i)}$$

D2: ii) La funzione ha periodo 1. Applicando la formula della trasformata di un segnale periodico si ha:

$$L[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-s}} \int_0^1 e^{-st}(1-t)\, dt = \frac{1}{1-e^{-s}} \big(\frac{2e^{-s}}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 1) \big)$$