1 Compito 1 del 17 Settembre 2009

E.1

La funzione integranda $f(z)$ é somma di una serie di Laurent convergente nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 1\}$. La curva γ é contenuta in tale insieme. Usando il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i res(f(z), 3) = 2\pi.$$

E.2

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, si ha

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-\alpha}\frac{1}{s-1},$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = e^t\frac{2-\alpha}{1-\alpha} - e^{\alpha t}\frac{1}{1-\alpha}.$$

Il valore di α é scelto in modo da soddisfare

$$e\frac{2-\alpha}{1-\alpha} - e^{\alpha}\frac{1}{1-\alpha} = 2.$$

E.3

$f(t)$ é una funzione generalmente continua, periodica e di quadrato sommabile in $[0, 2\pi)$ se $\alpha < \frac{1}{2}$ (osservare che $e^t - 1 \approx t$ in un intorno di $t = 0$). Dunque la serie converge se $\alpha < \frac{1}{2}$.

D.1

(ii) La funzione ammette primitiva in qualunque aperto semplicemente connesso contenuto nell'insieme di olomorfia di $f(z)$ che é $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{2k\pi i\}$. Si puó dunque scegliere ad esempio la striscia $A = \{z = x + iy : 0 < y < 2\pi, x \in \mathbb{R}\}$.

2 Compito 2 del 17 Settembre 2009

E.1

La funzione integranda $f(z)$ é somma di una serie di Laurent convergente nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$. La curva γ é contenuta in tale insieme. Usando il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i res(f(z), 1) = 2\pi e^{-i}.$$

E.2

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, si ha

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-\alpha)} + \frac{1}{s-\alpha},$$

da cui, antitrasformando,

$$y(t) = e^{\alpha t}\frac{1+\alpha}{\alpha} - H(t)\frac{1}{\alpha}.$$

Il valore di α é scelto in modo da soddisfare

$$e^{\alpha}\frac{1+\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 2.$$

E.3

$f(t)$ é una funzione generalmente continua, periodica e di quadrato sommabile in $[0, 2\pi)$ in quanto

$$\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^t}{(e^t-1)^{\frac{2}{3}}}dt = 3(e^{2\pi}-1)^{\frac{1}{3}}.$$

Usando quindi l'uguaglianza di Parseval il valore richiesto é $\dfrac{3}{\pi}(e^{2\pi}-1)^{\frac{1}{3}}$.

D.1

(ii) La funzione ammette primitiva in qualunque aperto semplicemente connesso contenuto nell'insieme di olomorfia di $f(z)$ che é $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Si puó dunque scegliere ad esempio $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : y = 0, x \leq 2\}$, e in questo insieme una primitiva é $Log(z - 2) - Log(z - 1)$.

D.2

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad x \in [0, 1]$. Si puó anche scegliere una qualunque serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ di raggio $\rho > 0$ negli insiemi della forma $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq a < \rho\}$.