Compito 1 del 17 dicembre 2005

E.1

a) La curva è la semicirconferenza che giace nel semipiano delle $y > 0$ di raggio unitario e centro l'origine che viene parametrizzata da

$$\begin{aligned} &\rho = 1, \\ &\theta = t \quad t \in [0, \pi] . \end{aligned}$$

L'integrale lungo questa curva è dato da

$$\int_0^\pi i d\theta = i\pi.$$

b) L'integrale lungo il segmento dato si riduce ad un integrale reale tra gli estremi 1 e -1, è dato quindi da

$$\int_{-1}^1 |x| \, x dx = 0$$

essendo la funzione dispari. Se ne deduce che la funzione non ammette primitiva dipendendo gli integrali calcolati dai cammini scelti.

E.2

Trasformando secondo Laplace il problema di Cauchy dato si ha:

$$\left(s^2 - 9\right) Y(s) = s - \mathcal{L}(\sin 3t)$$

da cui si ricava

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 - 9)} - \frac{\mathcal{L}(\sin 3t)}{(s^2 - 9)}.$$

Applicando alla relazione trovata l'antitrasformata di Laplace dopo che si è diviso e moltiplicato il secondo addendo del secondo membro per 3 si ha

$$y(t) = \cosh(3t) + \frac{1}{3}\left[\sinh(3t) * \sin(3t)\right] = \cosh(3t) + \frac{1}{3}\int_0^t \left[\sinh(3t) \sin(3t - \tau) \, d\tau\right]$$

E.3

Il limite della successione è dato da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x^2} \\ \frac{|x|}{x^4+1} \quad x = 2, x = 4 \\ 0 \quad x < 2, x > 4 \end{cases}$$

un insieme in cui questa successione di funzioni converge uniformemente è quindi dato da

$$[a, b] \subset (4, \infty)$$

essendo

$$\sup_{[a,b]} f_n(x) \leq \frac{b}{h^n}$$

con $h = (3-b)^2 > 1$.

D.1

Posto $\frac{1}{z} = w$ la serie si riconduce ad una serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} w^n$$

il cui raggio di convergenza è dato da

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow \rho = \frac{1}{l} = 1.$$

Quindi la serie converge per $|w| < 1$ ossia $|z| > 1$.

D.2

La $F(s) = O\left(\frac{1}{s^2}\right)$ per $|s| \to \infty$ ed è olomorfa in $\mathrm{Re}(s) > -1$ dal momento che i suoi punti singolari sono $s = -1 \pm i$. Si può quindi procedere al calcolo del teorema dell'antitrasformata di Laplace tramite il teorema dei residui

$$res\left(\frac{e^{st}}{s^2+2s+2}, -1-i\right) = \frac{e^{-(1+i)t}}{-2i}$$
$$res\left(\frac{e^{st}}{s^2+2s+2}, -1-i\right) = \frac{e^{(-1+i)t}}{2i}$$

da cui banalmente

$$f(t) = \frac{-e^{-(1+i)t}}{2i} + \frac{e^{(-1+i)t}}{2i} = e^{-t}\sin t \tag{1}$$