1 Compito 2 del 17 dicembre 2005

1.1 E.1

a) Il calcolo dell'integrale pu essere facilmente eseguito passando alla rappresentazione polare dei numeri complessi. Si ha dunque

$$\begin{aligned}\int_\gamma \bar{z}^2 dz &= \int_\pi^{2\pi} (cos\theta - isin\theta)^2(-sin\theta + icos\theta)d\theta \\ &= \int_\pi^{2\pi} icos^3\theta + isin^2\theta cos\theta + sin\theta cos_2\theta + sin^3\theta d\theta = -2\end{aligned}$$

b) Sul segmento proposto per il calcolo l'integrale si riduce ad un integrale reale

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \tag{1}$$

Non esiste una primitiva per questa funzione perch l'integrale dipende dal percorso scelto per il calcolo.

1.2 E.2

Si trasformi secondo Laplace il problema di Cauchy, si ha

$$(s^2+4)Y(s) = 1 + \mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2+9} \tag{2}$$

da cui si ricava

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \mathcal{L}[cos3t * \frac{1}{2}sin2t]$$

e quindi antitrasformando

$$y(t) = \frac{1}{2}sin2t + cos3t * \frac{1}{2}sin2t \tag{3}$$

1.3 E.3

L'unico termine che presenta una dipendenza da n in quetsa successione $(logx)^2$, conviene quindi procedere allo studio di questo termine singolarmente per poi dedurre il comportamento della successione:

$$\begin{array}{lcl} log^2x < 1 & \leftrightarrow & e^{-1} < x < e \\ log^2x > 1 & \leftrightarrow & x > eUx < e^{-1} \\ log^2x = 1 & \leftrightarrow & x = ex = e^{-1} \end{array}$$

e corrispondentemente si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x^2} \quad e^{-1} < x < e \\ 0 \quad x > e, x < e^{-1} \\ \frac{sinx}{x^2+1} \quad x < 2, x > 4 \end{cases}$$

. Si ha quindi convergenza uniforme in $\forall x > e$. Ad esempio

$$\sup_{[a,b]} \frac{|sinx|}{log^{2n}x + x^2} \leq \frac{1}{h^n} \tag{4}$$

dove $h = log^2 a > 1$.

1.4 D.1

Bisogna scegliere i valori

$$0 < |z - 1| < 2 \tag{5}$$

perch la parte singolare converge per $z \neq 1$ e la parte singolare ha raggio di convergenza 2

1.5 D.2

E' una funzione a valori reali, non costante. Non esiste primitiva, perch se esistesse, $|z|$ come derivata di una funzione olomorfa sarebbe anch'essa olomorfa.