1 Compito 1 del 18 aprile 2008

E.1

Lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$ nella palla forata $0 < |z-3i| < 6$ e'

$$-\frac{i}{6}\frac{1}{z-3i} + \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(6i)^n}(z-3i)^n.$$

E.2

L'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+s+2}$$

e' $f(t) = g(t-1)$, dove $g(t)$ e' l'antitrasformata di

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+2}$$

ed e' $g(t) = \dfrac{2}{\sqrt{7}}e^{-\frac{1}{2}t}sen\Big(\dfrac{\sqrt{7}}{2}t\Big)$. Quindi

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{7}}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}sen\Big(\frac{\sqrt{7}}{2}(t-1)\Big).$$

E.3

Lo sviluppo di Fourier e':

$$S_f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sen\,k\ cos(kx).$$

Per $x = 1$ si ottiene

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sen\,k\ cos\,k = \frac{1}{2}.$$

D.1

(ii)

$$\int_\gamma \frac{e^{z-5}}{z-1}\, dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e^{-4}.$$

$$\int_\gamma \frac{e^{z-5}}{(z-1)^{20}}\, dz = \frac{2\pi i}{(19)!} f^{(19)}(1) = \frac{2\pi i}{(19)!} e^{-4}.$$

D.2

(ii) La funzione (determinazione principale)

$$f(z) = (z^2-1)^{\sqrt{2}}$$

e' continua e olomorfa in

$$C \setminus \{z = (x,y) : x^2 - y^2 \leq 1, xy = 0\} =$$

$$= C \setminus \Big\{\{z = (x,y) : x = 0\} \cup \{z = (x,y) : y = 0, |x| \leq 1\}\Big\}.$$

2 Compito 2 del 18 aprile 2008

E.1

Lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$ nella palla forata $0 < |z+2i| < 4$ e'

$$\frac{i}{4}\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4i)^n}(z+2i)^n.$$

E.2

L'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s+1}$$

e' $f(t) = g(t-2)$, dove $g(t)$ e' l'antitrasformata di

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 2}$$

ed e' $g(t) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} sen\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\Big)$. Quindi

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-2)} sen\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2)\Big).$$

E.3

Lo sviluppo di Fourier e':

$$S_f(x) = -\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} sen(2k)\ cos(kx).$$

Per $x = 2$ si ottiene

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} sen(2k)\ cos(2k) = \frac{1}{2}.$$

D.1

(ii)

$$\int_\gamma \frac{e^{z-7}}{z+1}\ dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i e^{-8}.$$

$$\int_\gamma \frac{e^{z-7}}{(z+1)^{28}}\ dz = \frac{2\pi i}{(27)!} f^{(27)}(-1) = \frac{2\pi i}{(27)!} e^{-8}.$$

D.2

(ii) La funzione (determinazione principale)

$$f(z) = (z^2 - 1)^{\sqrt{2}}$$

e' continua e olomorfa in

$$C \setminus \{z = (x, y) : x^2 - y^2 \le -1, xy = 0\} =$$

$$= C \setminus \{z = (x, y) : x = 0, |y| \ge 1\}\ .$$