# 1 Compito 1 del 18 Giugno 2009

## E.1

(ii) La successione é definita per $x \neq 0$. Si ha convergenza puntuale per $e^{x^2} - 1 \geq 1$, cioé per $|x| \geq \sqrt{\log 2}$ (insieme di convergenza puntuale) e la funzione limite é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > \sqrt{\log 2} \\ 1 & |x| = \sqrt{\log 2}. \end{cases}$$

La convergenza non é uniforme in tutto l'insieme di convergenza puntuale perché il limite $f(x)$ é discontinuo. Si ha convergenza uniforme in ogni insieme del tipo $|x| \geq \alpha > \sqrt{\log 2}$, infatti

$$g_n = \sup_{|x| \geq \alpha} \frac{1}{|(e^{x^2} - 1)^n|} = \frac{1}{(e^{\alpha^2} - 1)^n},$$

e $\lim_{n \to \infty} g_n = 0$.

## E.2

(i) Una funzione continua a tratti in $[a, b]$ é una funzione che in $[a, b]$ ha al piú un numero finito di discontinuitá di tipo eliminabile o di salto. E' continua a tratti in $\mathbb{R}$ se lo é in ogni intervallo $[a, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii)Una funzione di quadrato sommabile in $[0, T]$ é una funzione tale che

$$\int_0^T (f(x))^2 dx < \infty.$$

(iii) La funzione é continua a tratti in $\mathbb{R}$ per $\alpha \geq 0$, é di quadrato sommabile in $[0, 2\pi)$ per $\alpha > -\frac{1}{2}$.

### E.3

(i) I punti singolari sono $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $k = 0$ si ha una singolaritá eliminabile infatti

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^3}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} z^2 = 0.$$

Per $k \neq 0$ si hanno poli semplici infatti

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z^3}{e^z - 1}(z-2k\pi i) = \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z^3}{e^{z-2k\pi i} - 1}(z-2k\pi i) = (z-2k\pi i)^3 = -8k^3\pi^3 i.$$

(ii) Dentro la curva cadono le singolaritá $z = 0$, $z = 2\pi i$ e dunque

$$\int_\gamma \frac{z^3}{e^z - 1} dz = 2\pi i \left[ res\left(\frac{z^3}{e^z - 1}, 0\right) + res\left(\frac{z^3}{e^z - 1}, 2\pi i\right)\right] = 2\pi i(-8\pi^3 i) = 16\pi^4.$$

### E.4

(i) Si ha $f(z) = e^{(z-3)Log(z+1)}$.

L'insieme di definizione é $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

L'insieme di olomorfia é $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq -1, y = 0\}$.

(ii) In $z = -2$ la funzione non é derivabile.

In $z = 0$ é derivabile con derivata

$$f'(0) = (z+1)^{z-3}\left(Log(z+1) + \frac{z-3}{z+1}\right)|_{z=0} = -3.$$

### E.5

(iii) $\mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{1}{1 - e^{-4\pi s}} \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-st} dt = \dfrac{1}{1 - e^{-4\pi s}} \dfrac{1 - e^{-2\pi s}}{s} = \dfrac{1}{s(1 + e^{-2\pi s})}.$

## 2 Compito 2 del 18 Giugno 2009

### E.1

(ii) La successione é definita per $x > 0$. Si ha convergenza puntuale per $e^{\sqrt{x}} - 1 \geq 1$, cioé per $x \geq (\log 2)^2$ (insieme di convergenza puntuale) e la funzione limite é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x > (\log 2)^2 \\ 1 & x = (\log 2)^2. \end{cases}$$

La convergenza non é uniforme in tutto l'insieme di convergenza puntuale perché il limite $f(x)$ é discontinuo. Si ha convergenza uniforme in ogni insieme del tipo $x \geq \alpha > (\log 2)^2$, infatti

$$g_n = \sup_{x \geq \alpha} \frac{1}{|(e^{\sqrt{x}} - 1)^n|} = \frac{1}{(e^{\sqrt{\alpha}} - 1)^n},$$

e $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$.

## E.2

(i) La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ periodica di periodo $T$ converge in media quadratica se

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (f(x) - \mathcal{S}_n(x))^2 dx = 0,$$

dove $\mathcal{S}_n(x)$ é la somma parziale $n$-ma della serie di Fourier di $f(x)$, cioé

$$\mathcal{S}_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right],$$

con $a_k$, $b_k$ coefficienti di Fourier di $f(x)$.

(ii) Sia $f(x)$ periodica di periodo $T$, generalmente continua in $[0, T]$ e tale che

$$\int_0^T (f(x))^2 dx < \infty$$

($f(x)$ di quadrato sommabile), allora la sua serie di Fourier converge in media quadratica.

(iii) Si ha convergenza in media quadratica per $\alpha > -\dfrac{1}{2}$.

## E.3

(i) I punti singolari sono $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Per $k = 0$ si ha una singolaritá eliminabile infatti

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} z = 0.$$

Per $k \neq 0$ si hanno poli semplici infatti

$$\lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z^2}{e^z - 1}(z-2k\pi i) = \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{z^2}{e^{z-2k\pi i} - 1}(z-2k\pi i) = (z-2k\pi i)^2 = -4k^2\pi^2.$$

(ii) Dentro la curva cadono le singolaritá $z = 0$, $z = 2\pi i$ e dunque

$$\int_\gamma \frac{z^2}{e^z - 1} dz = 2\pi i \left[ res\left( \frac{z^2}{e^z - 1}, 0 \right) + res\left( \frac{z^2}{e^z - 1}, 2\pi i \right) \right] = -8\pi^3 i.$$

## E.4

(i) Si ha $f(z) = e^{(z+5)Log(z-2)}$.
L'insieme di definizione é $\mathbb{C} \setminus \{2\}$.
L'insieme di olomorfia é $\mathbb{C} \setminus \{z = x + iy : x \leq 2, y = 0\}$.

(ii) In $z = 1$ la funzione non é derivabile. In $z = 3$ é derivabile con derivata

$$f^{'}(3) = (z-2)^{z+5} \left( Log(z-2) + \frac{z+5}{z-2} \right) |_{z=3} = 8.$$

## E.5

(iii) Si ha $f * H(t) = \int_0^t f(\tau)\, H(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau) d\tau$.
Dunque $(f * H)^{'}(t) = f(t) \qquad \forall t \geq 0$.