1 Compito 2 del 19 aprile 2006

E.1

Il calcolo dell'integrale si svolge velocemente utilizzando il teorema dei residui. Si osservi che 'unico punto singolare che cade all'interno della curva d'integrazione é $z = -2$, essendo $|-2-i| = \sqrt{5} < 3$. Il calcolo quindi immediato e si ha

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z+2} dz = 2\pi i res(f(z), -2) = 2\pi i \sin(-2) \tag{1}$$

E.2

I dati iniziali del problema di Cauchy non sono calcolati nell'origine, per ovviare a ció basta sfruttare la periodicit della funzione $\cos t$ e traslare il dato iniziale nell'origine. Posto $\tilde{y}(t) = y(t + 2\pi)$ il problema diventa

$$\tilde{y}'' - 3\tilde{y} = \cos t \quad \tilde{y}(0) = 0 \quad \tilde{y}'(0) = 0$$

Trasformando secondo Laplace l'intero problema si ha

$$Y(s)(s^2 - 3) = \frac{s}{1 + s^2} \tag{2}$$

Da cui

$$Y(s) = \frac{s}{(1 + s^2)(s^2 - 3)} \tag{3}$$

Antitrasformando utilizzando il teorema dei residui e dopo aver semplificato si ottiene

$$y(t) = \frac{-\cos(t) + \cosh(\sqrt{3}\ (2\,\pi - t))}{4} \tag{4}$$

E.3

La funzione presenta un polo doppio in $z = 0$, procedendo col metodo dei coefficienti indeterminati si ha

$$\frac{2}{\sin(z^2)} = \frac{2}{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \cdots} = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-}}{z} + c_0 + \cdots \tag{5}$$

da cui semplificando ed utilizzando il principio di equivalenza dei polinomi si ricava

$$\begin{aligned} c_{-2} &= 2 \\ c_{-1} &= 0 \\ c_0 &= 0 \end{aligned}$$

D.1

Posto $w = e^{-z}$ la serie si riscrive come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n+1} \tag{6}$$

che si riconosce immediatamente come una serie di potenze in w di raggio unitario (per quest'ultima affermazione basta applicare il teorema del rapporto). La regione di convergenza é quindi data da $|w| = |e^{-z}| = 1$ che implica $e^{-x} < 1 \Rightarrow e^{-x} < 1 \Rightarrow x > 0$. Si ha convergenza totale in ogni semipiano $x \geq a > 0$.

D.2

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$
$$z \neq 0$$

L'olomorfia di Log$z$ si ha per

$$z \in C^{**}. \tag{7}$$

Pertanto Log(i z) é olomorfa per

$$z \in C - \{x = 0, y \geq 0\}$$

[a4paper,12pt]article

2 Compito 1 del 19 aprile 2006

E.1

L'integrale puó essere calcolato utilizzando il teorema dei residui. A tale scopo vanno trovati i punti singolari della funzione integranda e valutati i residui di quelli interni alla curva d'integrazione, la circonferenza di centro i e raggio 4. E' immediato verificare che l'unico punto singolare della funzione integranda si trova nel punto $z = 3$, e che si tratta di un polo semplice. Pertanto si ha

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z-3} dz = 2\pi i \,\mathrm{res(f(z), 3) = 2\pi ie^3} \tag{8}$$

E.2

I dati iniziali del problema di Cauchy non sono calcolati nell'origine, per ovviare a ció basta sfruttare la periodicit della funzione $\cos t$ e traslare il dato iniziale nell'origine. Posto $t = x - 2\pi$ il problema diventa

$$y'' + 3y = \sin t \; y(0) = 0 \; y'(0) = 0$$

Trasformando secondo Laplace l'intero problema si ha

$$y(s)(s^2 - 3) = \frac{1}{1 + s^2} \tag{9}$$

Antitrasformando sfruttando il teorema dei residui e semplificando si ottiene

$$y(t) = \frac{\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,(2\,\pi - t)) + 3\,\sin(t)}{6} \tag{10}$$

E.3

La funzione da sviluppare presenta un polo doppio in $z = 0$ il primo coefficiente non nullo della serie di Laurent della funzione cos c_{-2}. Scrivendo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sin z)^2} &= \frac{1}{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \cdots} \qquad \Rightarrow \\
\frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 &= c_{-2}\left[1 - \frac{z^4}{3!} + \cdots\right] + c_{-1}\left[1 - \frac{z^4 \cdots}{3!}\right] + z^2[c_0 + c_1 z + \cdots]\left[1 - \frac{z^4}{3!}\cdots\right]
\end{aligned}$$

Da cui utilizzando il principio di equivalenza dei polinomi per uguagliare i termini di grado simile si ottiene

$$\begin{aligned}
c_{-2} &= 1 \\
c_{-1} &= 0 \\
c_0 &= 1/3
\end{aligned}$$

D.1

Posto $w = e^{-z}$, la serie data diventa una serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{w}{n+1} \tag{11}$$

con raggio di convergenza unitario. Infatti

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \frac{1}{l} = 1 \tag{12}$$

La regione di convergenza data quindi da

$$|e^{+z}| = 1 \quad \Rightarrow \quad e^x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \tag{13}$$

Si ha convergenza totale nei semipiani $x \leq a < 0$

D.2

La regione di olomorfia di Log(−iz) é data da

$$-iz = -ix + y \in C^{**} \tag{14}$$

ovvero

$$z \in C - \{x = 0, y \leq 0\} \tag{15}$$