1 Compito 1 del 20 Luglio 2009

E.1

(ii) La serie di funzioni é una serie di potenze di centro $z_0 = 1$ e con $a_n = \dfrac{e^{in}}{\sqrt{n}}$.
Il raggio di convergenza é $R = 1$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|e^{i(n+1)}|}{|\sqrt{n+1}|}\frac{\sqrt{n}}{|e^{in}|} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow 1 \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

Per la teoria delle serie di potenze abbiamo che

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$$

é l'insieme di convergenza assoluta e puntuale della serie;

$$J = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq a < 1\}$$

é l'insieme di convergenza totale e uniforme.

Non possiamo usare Abel per estendere l'uniforme fino al bordo poiché per $|z-1| = 1$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

E.2

(ii) Si considera la successione di funzioni $f_n(x) = \sin\left(\sqrt{\dfrac{x}{n}}\right) + 1$. Il limite puntuale in $[0,1]$ é la funzione $f(x) = 1$:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) + 1 \longrightarrow 1 \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

In $[0,1]$ la convergenza é uniforme:

$$\sup_{x\in[0,1]} |\sin\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right) + 1 - 1| = \sup_{x\in[0,1]} |\sin\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)| = \sqrt{\frac{1}{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

L'estremo superiore si ottiene per $x = 1$ poiché in $[0,1]$ la funzione é crescente.

Data la convergenza uniforme in $[0,1]$, posso applicare il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(\sin\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)+1\right)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)+1\right)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

E.3

(iii) $Log\left(\frac{z}{|z|}\right) = log\left(|\frac{z}{|z|}|\right) + i\,Arg\left(\frac{z}{|z|}\right) = log(1) + iArg(z) = iArg(z).$

E.4

(i) L'unica singolaritá per $f(z)$ e per $g(z)$ é il punto $z=2$.

Sviluppando in serie di Laurent intorno alla singolaritá si trova

$$f(z) = \sin\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-2)^{4n+2}}.$$

Lo sviluppo ha infiniti termini nella parte singolare e dunque $z=2$ é una singolaritá essenziale per $f(z)$. Analogamente

$$g(z) = (z-2)^2\sin\frac{1}{(z-2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{(z-2)^{2n-1}}.$$

Anche qui ci sono infiniti termini nella parte singolare e dunque $z=2$ é una singolaritá essenziale anche per $g(z)$.

(ii) I residui sono rappresentati dai coefficienti c_{-1} dello sviluppo in serie:

$$res(f(z),2) = 0, \qquad res(g(z),2) = -\frac{1}{6}.$$

E.5

Trasformando in Laplace tutta l'equazione differenziale si trova

$$s^2\mathcal{L}(y) - 1 + \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s},$$

da cui si ricava

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}.$$

Antitrasformando si trova

$$y(t) = \sin t - \cos t + 1.$$

2 Compito 2 del 20 Luglio 2009

E.1

(ii) La serie di funzioni é una serie di potenze di centro $z_0 = 5$ e con $a_n = e^{-in}\sqrt{n}$. Il raggio di convergenza é $R = 1$:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|e^{-i(n+1)}|\,|\sqrt{n+1}|}{|e^{-in}|\,|\sqrt{n}|} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \longrightarrow 1 \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

Per la teoria delle serie di potenze abbiamo che

$$I = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| < 1\}$$

é l'insieme di convergenza assoluta e puntuale della serie;

$$J = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| \leq a < 1\}$$

é l'insieme di convergenza totale e uniforme.

Non possiamo usare Abel per estendere l'uniforme fino al bordo poiché per $|z-5| = 1$ abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

E.2

(ii) Si considera la successione di funzioni $f_n(x) = e^{\sqrt{\frac{x}{n}}}$. Il limite puntuale in $[0,2]$ é la funzione $f(x) = 1$:

$$e^{\sqrt{\frac{x}{n}}} \longrightarrow 1 \qquad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

In $[0,2]$ la convergenza é uniforme:

$$\sup_{x\in[0,2]} |e^{\sqrt{\frac{x}{n}}} - 1| = e^{\sqrt{\frac{2}{n}}} - 1 \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

L'estremo superiore si ottiene per $x = 2$ poiché in $[0,2]$ la funzione é crescente.

Data la convergenza uniforme in $[0,2]$, posso applicare il teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 e^{\sqrt{\frac{x}{n}}}\, dx = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{\frac{x}{n}}}\, dx = \int_0^2 1\, dx = 2.$$

E.3

(iii) Si ha $|e^z| = e^{Re(z)}$. Deve dunque essere $Re(z) = 2$. Concludiamo che l'uguaglianza é verificata per ogni $z \in \mathbb{C}$ con parte reale uguale a 2:

$$z = 2 + iy, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

E.4

(i) L'unica singolaritá per $f(z)$ e per $g(z)$ é il punto $z = 1$.

Sviluppando in serie di Laurent intorno alla singolaritá si trova

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}.$$

Lo sviluppo ha infiniti termini nella parte singolare e dunque $z = 1$ é una singolaritá essenziale per $f(z)$. Analogamente

$$g(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(z-1)^{n-1}}.$$

Anche qui ci sono infiniti termini nella parte singolare e dunque $z = 1$ é una singolaritá essenziale anche per $g(z)$.

(ii) I residui sono rappresentati dai coefficienti c_{-1} dello sviluppo in serie:

$$res(f(z), 2) = 1, \qquad res(g(z), 2) = \frac{1}{2}.$$

E.5

Trasformando in Laplace tutta l'equazione differenziale si trova

$$s^2\mathcal{L}(y) - 1 - \mathcal{L}(y) = \frac{2}{s},$$

da cui si ricava

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2-1} + \frac{2}{s(s^2-1)} = \frac{1}{s^2-1} - \frac{2}{s} + \frac{2}{s^2-1}.$$

Antitrasformando si trova

$$y(t) = \sinh t - 2 + 2\cosh t.$$