1 Compito 1 del 20 Luglio 2010

E.1

(ii) La serie data é una serie telescopica e dunque la successione delle somme parziali si riduce a

$$S_n(x) = sen(x^2) - \frac{(sen(x^2))^{n+1}}{n+1}.$$

Il calcolo del limite é semplice:

$$lim_{n\to\infty} S_n(x) = sen(x^2),$$

poiché $\frac{(sen(x^2))^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. La convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ dato che

$$sup_{\mathbb{R}}|S_n(x) - sen(x^2)| = sup_{\mathbb{R}}|\frac{(sen(x^2))^{n+1}}{n+1}| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty.$$

E.2

Possiamo scrivere

$$log\left(\frac{1-x}{2}\right) = log(1-x) - log(2)$$

e, sfruttando lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo, otteniamo

$$log(1-x) - log(2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} - log(2) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - log(2).$$

La derivata richiesta é

$$f^{(5)}(0) = a_5 \, 5! = -\frac{1}{5} \, 5! = -4! = -24,$$

essendo $n+1 = 5$ e $a_{n+1} = -\frac{1}{n+1}$.

E.3

Sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann abbiamo

$$\begin{cases} u_x = -e^{-x-1}cos(y) = v_y \\ u_y = -e^{-x-1}sen(y) = -v_x. \end{cases}$$

Integrando rispetto a y la prima espressione otteniamo

$$v = -e^{-x-1}sen(y) + h(x);$$

integrando rispetto a x la seconda otteniamo

$$v = -e^{-x-1}sen(y) + g(y).$$

Da cui ricaviamo $h(x) = g(y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. Concludiamo che la funzione $v(x, y)$ cercata é $v(x, y) = -e^{-x-1}sen(y) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. La funzione olomorfa richiesta é $f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)$.

D.1

La curva γ assegnata é una circonferenza di raggio 3 e centro l'origine. La funzione integranda $|z|cos(z)$ non é olomorfa nell'insieme di cui γ é il bordo. Possiamo notare che su γ si ha $|z| = 3$ e dunque

$$\int_\gamma |z|cos(z)dz = 3\int_\gamma cos(z)dz = 0,$$

essendo $cos(z)$ olomorfa e γ una curva chiusa contenuta nell'insieme di olomorfia.

D.2

(ii) La funzione $e^{st}\, F(s)$ ha due poli doppi in $\pm 2i$. Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned} res(e^{st}\, F(s), 2i) &= lim_{s\to 2i}\frac{d}{ds}e^{st}\, F(s)(s-2i)^2 = \\ &= lim_{s\to 2i}\frac{e^{st}[(4st+4)(s+2i)-8s]}{(s+2i)^3} = t\frac{e^{2it}}{2i}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
res(e^{st}\,F(s),-2i) &= lim_{s\to -2i}\frac{d}{ds}e^{st}\,F(s)(s+2i)^2 = \\
&= lim_{s\to -2i}\frac{e^{st}[(4st+4)(s-2i)-8s]}{(s-2i)^3} = t\frac{e^{-2it}}{2i}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo dunque

$$
\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds = res(e^{st}\,F(s),2i)+res(e^{st}\,F(s),-2i) = t\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i} = tsen(2t).
$$

2 Compito 2 del 20 Luglio 2010

E.1

(ii) La serie data é una serie telescopica e dunque la successione delle somme parziali si riduce a

$$
S_n(x) = cos(2x) - \frac{(cos(2x))^{n+1}}{n+1}.
$$

Il calcolo del limite é semplice:

$$
lim_{n\to\infty}S_n(x) = cos(2x),
$$

poiché $\frac{(cos(2x))^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$ per $n \to \infty$. La convergenza é uniforme su tutto $\mathbb{R}$ dato che

$$
sup_{\mathbb{R}}|S_n(x) - cos(2x)| = sup_{\mathbb{R}}|\frac{(cos(2x))^{n+1}}{n+1}| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad n\to\infty.
$$

E.2

Possiamo scrivere

$$
log\left(\frac{1-2x}{3}\right) = log(1-2x) - log(3)
$$

e, sfruttando lo sviluppo in serie di potenze del logaritmo, otteniamo

$$
log(1-2x)-log(3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(-1)^{n+1}\frac{(2x)^{n+1}}{n+1} - log(3) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^{n+1}}{n+1} - log(3).
$$

La derivata richiesta é

$$f^{(6)}(0) = a_6\, 6! = -\frac{2^6}{6}\, 6!,$$

essendo $n + 1 = 6$ e $a_{n+1} = -\dfrac{2^{n+1}}{n+1}$.

E.3

Sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann abbiamo

$$\begin{cases} u_x = -2e^{1-2x} cos(2y) = v_y \\ u_y = 2e^{1-2x} sen(2y) = v_x. \end{cases}$$

Integrando rispetto a y la prima espressione otteniamo

$$v = -e^{1-2x} sen(2y) + h(x);$$

integrando rispetto a x la seconda otteniamo

$$v = -e^{1-2x} sen(2y) + g(y).$$

Da cui ricaviamo $h(x) = g(y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$. Concludiamo che la funzione $v(x, y)$ cercata é $v(x, y) = -2e^{1-2x} sen(2y) + c$, con $c \in \mathbb{R}$. La funzione olomorfa richiesta é $f(x, y) = u(x, y) + i\, v(x, y)$.

D.1

La curva γ assegnata é una circonferenza di raggio 2 e centro il punto $(1, 0)$. La funzione integranda $|z - 1| sen(z)$ non é olomorfa nell'insieme di cui γ é il bordo. Possiamo notare che su γ si ha $|z - 1| = 2$ e dunque

$$\int_\gamma |z - 1| sen(z) dz = 2 \int_\gamma sen(z) dz = 0,$$

essendo $sen(z)$ olomorfa e γ una curva chiusa contenuta nell'insieme di olomorfia.

D.2

(ii) La funzione $e^{st}\,F(s)$ ha due poli doppi in $\pm 3i$. Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned}
res(e^{st}\,F(s),3i) &= lim_{s\to 3i}\frac{d}{ds}e^{st}\,F(s)(s-3i)^2 = \\
&= lim_{s\to 3i}\frac{e^{st}[(t(s^2-9)+2s)(s+3i)-2(s^2-9)]}{(s+3i)^3} = t\frac{e^{3it}}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
res(e^{st}\,F(s),-3i) &= lim_{s\to -3i}\frac{d}{ds}e^{st}\,F(s)(s+3i)^2 = \\
&= lim_{s\to -3i}\frac{e^{st}[(t(s^2-9)+2s)(s-3i)-2(s^2-9)]}{(s-3i)^3} = t\frac{e^{-3it}}{2}.
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}F(s)ds = res(e^{st}\,F(s),3i)+res(e^{st}\,F(s),-3i) = t\frac{e^{3it}+e^{-3it}}{2} = tcos(3t).$$