1 Compito 1 del 25 Febbraio 2010

E.1

La funzione integranda non é integrabile nel punto $x = 2$ e dunque l'integrale va inteso a valor principale. Consideriamo l'estensione naturale di f nel campo complesso:

$$f(z) = \frac{1}{(z^3 + 8i)(z - 2)}$$

e la curva chiusa γ ottenuta componendo una semicirconferenza γ_R di raggio $R > 0$ nel semipiano $Im(z) \geq 0$, il segmento $[-R, 2-\varepsilon]$, la semicirconferenza $|z-2| < \varepsilon$ contenuta nel semipiano $Im(z) \geq 0$ e il segmento $[2+\varepsilon, R]$. Le singolaritá di $f(z)$ sono $z_0 = -\sqrt{3} - i$, $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 2$ e sono tutti poli semplici. L'unica singolaritá interna a γ é $z_2 = 2i$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i res(f(z), 2i) = 2\pi i \frac{-1}{24(i-1)}.$$

Possiamo scrivere

$$2\pi i \frac{-1}{24(i-1)} = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{2-\varepsilon} f(x)dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{2+\varepsilon}^{R} f(x)dx.$$

Facendo tendere R all'infinito si ottiene

$$2\pi i \frac{-1}{24(i-1)} = \int_{-\infty}^{2-\varepsilon} f(x)dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz + \int_{2+\varepsilon}^{\infty} f(x)dx,$$

poiché per il Lemma del grande cerchio si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Facendo tendere ε a zero e usando il Lemma del polo semplice si trova

$$2\pi i \frac{-1}{24(i-1)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i res(f(z), 2).$$

Si conclude che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \frac{-1}{24(i-1)} + \pi i \frac{1}{8(i+1)}.$$

E.2

Facciamo un cambiamento di variabile per riportarci ad un problema di Cauchy con dati inziali assegnati nel punto $t = 0$. Poniamo dunque $\tilde{y(t)} = y(t + 2\pi)$. Posto $\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}(t)](s)$, si ha

$$\tilde{Y}(s) = \frac{6}{s^2(s-1)} = \frac{-6}{s} + \frac{-6}{s^2} + \frac{6}{s-1}$$

da cui, antitrasformando, $\tilde{y}(t) = (-6 - 6t + 6e^t)H(t)$. La soluzione del problema originario é $y(t) = (-6 - 6(t - 2\pi) + 6e^{t-2\pi})H(t)$.

E.3

Studiamo la convergena puntuale della successione di funzioni $f_n(z) = \dfrac{z^n}{2^n n^2}$ per $z \in \mathbb{C}$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \begin{cases} 0 & |z| \leq 2 \\ +\infty & |z| > 2. \end{cases}$$

La successione converge uniformemente alla funzione nulla nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$ di convergenza puntuale:

$$\sup_{|z|\leq 2} \frac{|z|^n}{2^n n^2} = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

D.1

(ii) Il punto $t = 5\pi$ é un punto di discontinuitá per la funzione periodica $f(t)$ e dunque si ha

$$S(5\pi) = \frac{f(5\pi^-) + f(5\pi^+)}{2} = \frac{e^{2\pi} + 1}{2}.$$

Inoltre $f(5\pi) = f(5\pi^+) = 1$.

D.2

(ii) Usando la decomposizione in fratti semplici possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)(z+4i)} = \frac{1}{6i}\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{6i}\frac{1}{z+4i}.$$

Il primo termine é giá sviluppato nel punto $z = 2i$. Per il secondo abbiamo

$$-\frac{1}{6i}\frac{1}{z+4i} = -\frac{1}{6i}\frac{1}{(z-2i)+6i} = -\frac{1}{(6i)^2}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-2i}{6i}\right)} = -\frac{1}{(6i)^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-2i}{6i}\right)^n,$$

avendo sfruttato la serie geometrica. L'ultima uguaglianza vale se e solo se $|z-2i| < 6$. Lo sviluppo é dunque

$$f(z) = \frac{1}{6i}\frac{1}{z-2i} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(z-2i)^n}{(6i)^{n+2}}$$

che vale nell'intorno forato di $z = 2i$ con raggio uguale a 6.

(iii) Possiamo fare lo sviluppo di Laurent nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z-2i| > 6\}$. In questo caso scriviamo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6i}\frac{1}{z+4i} &= -\frac{1}{6i}\frac{1}{(z-2i)+6i} = -\frac{1}{6i(z-2i)}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{6i}{z-2i}\right)} = \\ &= -\frac{1}{6i(z-2i)}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{6i}{z-2i}\right)^n. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza vale nell'insieme considerato. Abbiamo dunque

$$f(z) = \frac{1}{6i}\frac{1}{z-2i} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(6i)^{n-1}}{(z-2i)^{n+1}}.$$

2 Compito 2 del 25 Febbraio 2010

E.1

Consideriamo l'estensione naturale di $f(x)$ nel campo complesso:

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{(z^3+8i)}$$

e la curva chiusa γ ottenuta componendo una semicirconferenza γ_R di raggio $R > 0$ nel semipiano $Im(z) \geq 0$ con il segmento $[-R, R]$. Le singolaritá di

$f(z)$ sono $z_0 = -\sqrt{3} - i$, $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 2i$ e sono tutti poli semplici. L'unica singolaritá interna a γ é $z_2 = 2i$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i res(f(z), 2i) = 2\pi i \frac{-e^{-4}}{12}.$$

Possiamo scrivere

$$2\pi i \frac{-e^{-4}}{12} = \int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Facendo tendere R all'infinito si ottiene

$$2\pi i \frac{-e^{-4}}{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

poiché per il Lemma di Jordan si ha

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0.$$

Si conclude che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \frac{-e^{-4}}{6}.$$

E.2

Facciamo un cambiamento di variabile per riportarci ad un problema di Cauchy con dati inziali assegnati nel punto $t = 0$. Poniamo dunque $\widetilde{y(t)} = y(t+2)$. Posto $\tilde{Y}(s) = \mathcal{L}[\tilde{y}(t)](s)$, si ha

$$\tilde{Y}(s) = \frac{3}{s^2(s+3)} = \frac{-1}{3s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{3(s+3)}$$

da cui, antitrasformando, $\tilde{y}(t) = (-\frac{1}{3} + t + \frac{1}{3}e^{-3t})H(t)$. La soluzione del problema originario é $y(t) = (-\frac{1}{3} + t - 2 + \frac{1}{3}e^{-3(t-2)})H(t)$.

E.3

Studiamo la convergena puntuale della successione di funzioni $f_n(z) = \dfrac{(z-2)^n}{\sqrt{n+1}}$ per $z \in \mathbb{C}$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(z)| = \begin{cases} 0 & |z-2| \leq 1 \\ +\infty & |z-2| > 1. \end{cases}$$

La successione converge uniformemente alla funzione nulla nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z-2| \leq 1\}$ di convergenza puntuale:

$$\sup_{|z-2|\leq 1} \frac{|z-2|^n}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to +\infty.$$

D.1

(ii) Il punto $t = 27$ é un punto di discontinuitá per la funzione periodica $f(t)$ e dunque si ha

$$S(27) = \frac{f(27^-) + f(27^+)}{2} = \frac{e^{-3}+1}{2}.$$

Inoltre $f(27) = f(27^+) = 1$.

D.2

(ii) Usando la decomposizione in fratti semplici possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2+25} = \frac{1}{(z-5i)(z+5i)} = \\ &= \frac{1}{10i}\frac{1}{z-5i} - \frac{1}{10i}\frac{1}{z+5i}. \end{aligned}$$

Il primo termine é giá sviluppato nel punto $z = 5i$. Per il secondo abbiamo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{10i}\frac{1}{z+5i} &= -\frac{1}{10i}\frac{1}{(z-5i)+10i} = \\ &= -\frac{1}{(10i)^2}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{z-5i}{10i}\right)} = -\frac{1}{(10i)^2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z-5i}{10i}\right)^n, \end{aligned}$$

avendo sfruttato la serie geometrica. L'ultima uguaglianza vale se e solo se $|z-5i| < 10$. Lo sviluppo é dunque

$$f(z) = \frac{1}{10i}\frac{1}{z-5i} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(z-5i)^n}{(10i)^{n+2}}$$

che vale nell'intorno forato di $z = 5i$ con raggio uguale a 10.

(iii) Possiamo fare lo sviluppo di Laurent nell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |z - 5i| > 10\}$. In questo caso scriviamo

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{10i}\frac{1}{z+5i} &= -\frac{1}{10i}\frac{1}{(z-5i)+10i} = -\frac{1}{10i(z-5i)}\frac{1}{1-\left(-\dfrac{10i}{z-5i}\right)} = \\
&= -\frac{1}{10i(z-5i)}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{10i}{z-5i}\right)^n.
\end{aligned}
$$

L'ultima uguaglianza vale nell'insieme considerato. Abbiamo dunque

$$
f(z) = \frac{1}{10i}\frac{1}{z-5i} + \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\frac{(10i)^{n-1}}{(z-5i)^{n+1}}.
$$