1 Compito 1 del 26 marzo 2007

E.1

L'integrale in questione, I , puó essere calcolato utilizzando il teorema dei residui e il lemma di Jordan. Si ha

$$I = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega+1)x}}{x^2+1}dx - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega-1)x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi i}{2}(e^{-(\omega-1)} - e^{-(\omega+1)})$$

Infatti, limitandoci al secondo dei due integrali, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega-1)x}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{i(\omega-1)x}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{i(\omega-1)x}}{x^2+1}dx + \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{i(\omega-1)z}}{z^2+1}dz =$$

$$= \int_{\gamma} \frac{e^{i(\omega-1)z}}{z^2+1}dz = 2\pi i\, res(\frac{e^{i(\omega-1)z}}{z^2+1}, i) = \pi e^{-(\omega-1)}$$

dove γ é la curva composta dalla semicirconferenza di centro l'origine e raggio R e dal segmento di estremi -R e R dell'asse reale. É possibile applicare il lemma di Jordan perché la funzione $\frac{1}{z^2+1}$ tende a zero per $|z|$ che tende a $+\infty$ e $\omega - 1 > 0$.

E.2

$$y(t) = (\alpha - 1)e^{-t} + 1$$

$$\alpha = 1$$

E.3

Posto $|z| - 1 = t$, la serie diventa una serie di potenze nel campo reale, con raggio di convergenza 1, che diverge per $t = 1$ e converge per $t = -1$ (é di Leibnitz). Dunque, per la serie iniziale, si ha convergenza puntuale nella cerchio aperto $|z| < 2$ e totale nelle corone chiuse $1 - a \leq |z| \leq 1 + a$ con $0 < a < 1$ arbitrario.

D.1

(ii) In $x = 3\pi/2$ la somma vale $\pi^2/4$. In $x = 2\pi$ la somma vale $\pi^2/2$.

D.2

$z = 0$ é l'unico punto singolare, singolaritá essenziale, con residuo π. Dal teorema dei residui, l'integrale vale $2\pi^2 i$.

2 Compito 2 del 26 marzo 2007

E.1

L'integrale in questione, I , puó essere calcolato utilizzando il teorema dei residui e il lemma di Jordan. Si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega+1)x}}{x^2+1}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega-1)x}}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}(e^{-(\omega+1)} + e^{-(\omega-1)})$$

Infatti, limitandoci al primo dei due integrali, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\omega+1)x}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{i(\omega+1)x}}{x^2+1}dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{e^{i(\omega+1)x}}{x^2+1}dx + \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} \frac{e^{i(\omega+1)z}}{z^2+1}dz =$$

$$= \int_{\gamma} \frac{e^{i(\omega+1)z}}{z^2+1}dz = 2\pi i\, res(\frac{e^{i(\omega+1)z}}{z^2+1}, i) = \pi e^{-(\omega+1)}$$

dove γ é la curva composta dalla semicirconferenza di centro l'origine e raggio R e dal segmento di estremi -R e R dell'asse reale. É possibile applicare il lemma di Jordan perché la funzione $\frac{1}{z^2+1}$ tende a zero per $|z|$ che tende a $+\infty$ e $\omega + 1 > 0$.

E.2

$$y(t) = (\beta + 3)e^t - 3$$
$$\beta = -3$$

E.3

Posto $|z| - 2 = t$, la serie diventa una serie di potenze nel campo reale, con raggio di convergenza 1, che diverge per $t = 1$ e converge per $t = -1$ (é di Leibnitz). Dunque, per la serie iniziale, si ha convergenza puntuale nella corona circolare $1 \le |z| < 3$ e totale nelle corone chiuse $2 - a \le |z| \le 2 + a$ con $0 < a < 1$ arbitrario.

D.1

(ii) In $x = 4$ la somma vale 2. In $x = 4.5$ la somma vale 1.5.

D.2

$z = 0$ é l'unico punto singolare, singolaritá essenziale, con residuo 2. Dal teorema dei residui, l'integrale vale $4\pi i$.