marzo.aux marzo.aux marzo.aux

Compito 2 del 27 marzo 2006

E.1

Sebbene l'integrale possa essere velocemente calcolato oservando che la funzione é periodica e dispari, viene richiesto il calcolo tramite la tecnica della variabile complessa. Ponendo

$$\begin{aligned} z &= e^{ix}, \\ \sin t &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos t &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ dz &= ie^{ix}dx \end{aligned}$$

L'integrale si riscrive in termini della variabile z ed é uguale a 0

$$-\int_\gamma \frac{z^2 - 1}{z(4z + z^2 + 1)} dz = -2\pi i(-1 + 1) = 0, \tag{1}$$

infatti

$$\begin{aligned} res(f(z), 0) &= -1 \\ res(f(z), -2 + \sqrt{3}) &= 1 \end{aligned}$$

E.2

La serie puó essere riscritta come

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+3)^{n-1}} \frac{1}{(n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+3)^{n+1}}{n+1} \tag{2}$$

per $0 < |z + 3| < 1$. La singolaritá nel punto -3 é essenziale e il residuo in quel punto é 1/2.

E.3

In primo luogo conviene calcolare il limite della successione

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 1 \quad (x, y) = (0, 0) \\ f(x, y) &= \frac{1}{5} \quad (x, y) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

Quindi la successione converge in tutto R^2, ma non uniformemente. La convergenza uniforme si ha invece all'esterno di qualunque cerchio centrato nell'origine di raggio arbitrario. Infatti, posto per brevit $x^2 + y^2 = t$, si ha

$$f'_n(t) = -\frac{n^2}{(5 + n^2 t)^2} < 0$$
$$\sup_{0 \leq \delta \leq t} f_n(t) = \frac{1}{1 + n\delta}$$

D.1

Per $s \to \infty$ si ha che $F(s) = O(\frac{1}{s^2})$ e la funzione é olomorfa per $Re(s) > 3$. Dunque

$$f(t) = res(e^{st}F(s), -i) + res(e^{st}F(s), 3) = \frac{e^{-it}}{8 + 6i} + \frac{te^{3t}(3 + i) - e^{3t}}{8 + 6i} \quad (3)$$

D.2

Si osservi che $g(z)$ é somma di una serie di potenze di centro 1 e raggio $\rho = 1$, infatti

$$l = lim_{n \to \infty} \frac{log(n + 1)}{logn} = 1 \rho = \frac{1}{l} = 1$$

quindi la funzione é olomorfa in $|z - 1| < 1$