# 1 Compito 1 del 27 giugno 2007

## E.1

L'integrale in questione, I , puó essere calcolato utilizzando il teorema dei residui. Nel caso a), la curva é la circonferenza di centro il punto (1,0) e raggio 2 ed entrambi i punti singolari della funzione, $z = 0$ e $z = 1$, cadono entro la curva.Il punto $z = 0$ é singolaritá essenziale per $e^{\frac{1}{z}}$, con residuo uguale a 1,come si vede sviluppando tale funzione in serie di Laurent attorno a $z = 0$. Il punto $z = 1$ é singolaritá essenziale per $sen(\frac{1}{z-1})$,con residuo uguale a 1, come si vede sviluppando tale funzione in serie di Laurent attorno a $z = 1$ . Dunque si ha

$$I = \int_\gamma e^{1/z} dz - \int_\gamma sen(\frac{1}{z-1})dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

Nel caso b) la curva é il bordo di un rettangolo con i lati paralleli agli assi e contiene al suo interno solo il punto $z = 1$. Dunque

$$I = \int_\gamma e^{1/z} dz - \int_\gamma sen(\frac{1}{z-1})dz = 0 - 2\pi i = -2\pi i$$

## E.2

Detta $Y_n(s)$ la trasformata della soluzione $y_n(t)$ si ha

$$s^2 Y_n(s) + 2s - n^2 Y_n(s) = \frac{n^2}{s}$$

Da cui

$$y_n(t) = -1 - cosh(nt)$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(t) = -\infty$$

## E.3

La successione converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0, 1)$. Si ha convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[0, a)$ con $0 < a < 1$ in quanto, per ogni n fissato

$$\sup_{0\le x<a} x^n log(n^3 x + 1) = a^n log(n^3 a + 1)$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} a^n log(n^3 a + 1) = 0$$

### D.1

(ii)

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

### D.2

L'insieme é $C$ privato del segmento avente come estremi i punti $(0,0)$ e $(1,1)$ e dunque non é semplicemente connesso.

## 2 Compito 2 del 26 marzo 2007

### E.1

L'integrale in questione, I , puó essere calcolato utilizzando il teorema dei residui. Nel caso a), la curva é la circonferenza di centro il punto (1,0) e raggio 2 ed entrambi i punti singolari della funzione, $z = 0$ e $z = 1$, cadono entro la curva.Il punto $z = 0$ é singolaritá essenziale per $3sen\frac{1}{z^2}$, con residuo uguale a 0, come si vede sviluppando tale funzione in serie di Laurent attorno a $z = 0$. Il punto $z = 1$ é singolaritá essenziale per $e^{\frac{2}{z-1}}$,con residuo uguale a 2, come si vede sviluppando tale funzione in serie di Laurent attorno a $z = 1$. Dunque si ha

$$I = \int_\gamma e^{\frac{2}{z-1}} dz - \int_\gamma 3sen(\frac{1}{z^2})dz = 4\pi i.$$

Nel caso b) la curva é il bordo di un quadrato con i lati paralleli agli assi e contiene al suo interno solo il punto $z = 0$. Dunque

$$I = \int_\gamma e^{\frac{2}{z-1}} dz - \int_\gamma 3sen(\frac{1}{z^2})dz = 0.$$

### E.2

Detta $Y_n(s)$ la trasformata della soluzione $y_n(t)$ si ha

$$s^2 Y_n(s) + 1 + n^2 Y_n(s) = \frac{n^2}{s}$$

Da cui

$$y_n(t) = -1 - cos(nt) - \frac{sen(nt)}{n}$$

e dunque non esiste il $\lim_{n\to+\infty} y_n(t)$.

## E.3

La successione converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ nell'intervallo $[0, 1)$. Si ha convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[0, a)$ con $0 < a < 1$ in quanto, per ogni n fissato

$$\sup_{0 \leq x < a} x^{2n} log(n^2 + x) = a^{2n} log(n^2 + a)$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} a^{2n} log(n^2 + a) = 0$$

## D.1

(ii)

$$f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

## D.2

L'insieme é $C$ privato del segmento avente come estremi i punti $(0, 0)$ e $(0, -1)$ e dunque non é semplicemente connesso.