1 Compito 1 del 29 Gennaio 2010

E.1

Possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{3(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}},$$

e dunque $f(z)$ é somma di due funzioni fratte definite per $z \neq 1$ e di una serie di potenze convergente (e dunque analitica) in $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 3\}$. L'insieme di analiticitá della funzione $f(z)$ é dunque

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 3\}.$$

L'unico punto singolare di $f(z)$ é $z = 1$, polo doppio. Il residuo si calcola facilmente utilizzando la definizione di residuo per un polo di ordine due oppure dallo sviluppo in serie di Laurent della funzione:

$$res(f(z), 1) = 1.$$

E.2

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, si ha

$$Y(s) = \frac{3!}{s^3} - \frac{3!}{s^4},$$

da cui, antitrasformando, $f(t) = (3t^2 - t^3)H(t)$.

E.3

La curva é rappresentata da una parabola con concavitá verso l'alto concatenata con la retta $y = 2$. L'unico punto singolare della funzione é $z = i$ che cade all'interno della curva ed é un polo doppio. Usando il teorema dei residui si trova

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{d}{dz} sin(z)|_{z=i} = 2\pi i cos(i).$$

D.1

(ii) Il segnale $f(t)$ é nullo al di fuori dell'intervallo $[0, \pi]$ e dunque $\sigma[f] = -\infty$.

D.2

(ii) La funzione e^{z^3} é olomorfa in $\mathbb{C}$ e dunque per il teorema integrale di Cauchy si ha

$$\int_\gamma e^{z^3} dz = 0$$

per ogni γ curva chiusa regolare. In particolare questo vale per $\gamma := \gamma_1 \gamma_2^-$, da cui la tesi.

2 Compito 2 del 29 Gennaio 2010

E.1

Possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{2(z-3)^3} + \frac{1}{4(z-3)^2} + \frac{1}{8(z-3)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{2^{n+4}},$$

e dunque $f(z)$ é somma di tre funzioni fratte definite per $z \neq 3$ e di una serie di potenze convergente (e dunque analitica) in $\{z \in \mathbb{C} : |z-3| < 2\}$. L'insieme di analiticitá della funzione $f(z)$ é dunque

$$A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 2\}.$$

L'unico punto singolare di $f(z)$ é $z = 3$, polo del terzo ordine. Il residuo si calcola facilmente utilizzando la definizione di residuo per un polo del terzo ordine oppure dallo sviluppo in serie di Laurent della funzione:

$$res(f(z), 1) = \frac{1}{8}.$$

E.2

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$, si ha

$$Y(s) = \frac{4!}{s^3} + \frac{4!}{s^5},$$

da cui, antitrasformando, $f(t) = (12t^2 + t^4)H(t)$.

E.3

La curva é rappresentata da una parabola con concavitá verso il basso concatenata con la retta $y = -4$. L'unico punto singolare della funzione é $z = -3i$ che cade all'interno della curva ed é un polo doppio. Usando il teorema dei residui si trova

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \frac{d}{dz} cos(z)|_{z=-3i} = 2\pi i sin(3i).$$

D.1

(ii) Il segnale $f(t)$ é nullo al di fuori dell'intervallo $[0, 2]$ e dunque $\sigma[f] = -\infty$.

D.2

(ii) La funzione $sin(z^3)$ é olomorfa in $\mathbb{C}$ e dunque per il teorema integrale di Cauchy si ha

$$\int_\gamma sin(z^3)dz = 0$$

per ogni γ curva chiusa regolare. In particolare questo vale per $\gamma := \gamma_1\gamma_2^-$, da cui la tesi.