Compito 1 del 29 marzo 2004

E.1

In primo luogo bisogna calcolare i punti singolari della funzione, che sono dati da

$$z = -i + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

di questi punti solo due sono contenuti nel cerchio e sono: $z_1 = -i + \frac{\pi}{2}$ e $z_2 = -i - \frac{\pi}{2}$. Si può ora procedere al calcolo dei residui

$$res\left(f, -i + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(z+i)}{-\sin\left(z+i-\frac{\pi}{2}\right)}\left(z+i-\frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_{z=-i+\frac{\pi}{2}} = -1$$

$$res\left(f, -i - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(z+i)}{\sin\left(z+i+\frac{\pi}{2}\right)}\left(z+i+\frac{\pi}{2}\right)\Bigg|_{z=-i-\frac{\pi}{2}} = -1$$

Da cui si ricava che il valore cercato dell'integrale è

$$2\pi i\,(-2) = -4\pi i$$

E.2

Si trasformi secondo Laplace l'equazione data tenendo conto del dato iniziale

$$\left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

si ricavi quindi l'espressione di $y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2\,(s^2+2s+2)}$$

e si proceda al calcolo dell' antitrasformata di Laplace per mezzo del teorema dei residui. La funzione di cui vanno calcolati i residui è

$$f(s) = e^{st} Y(s)\,.$$

La funzione presenta tre poli, due semplici per $s = -1 \pm i$ ed uno doppio in $s = 2$. Si ha

$$res\,(f(s), 2) = \frac{e^{2\,t}\ (-3 + 5\,t)}{50}$$

$$res\,(f(s), -1+i) = \frac{\frac{i}{2}}{e^{(1-i)\,t}}$$

$$res\,(f(s), -1+i) = \frac{\frac{-i}{2}}{e^{(1+i)\,t}}$$

Sommando si ha la soluzione

$$y(x) = \frac{e^{3\,x}\ (-3 + 5\,x) + 3\,\cos(x) + 4\,\sin(x)}{50\,e^{x}}$$

E.3

Il raggio di convergenza della serie di funzioni, centrata in 1, è dato da:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+2)^{\frac{1}{3}}}} = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{l} = 1$$

quindi la serie converge per

$$|x-1| < 1 \quad \Rightarrow 0 < x < 2$$

in particolare non si ha convergenza per $x = 2$ mentre per $x = 0$ la serie converge.

D.1

La funzione è olomorfa nei punti in cui il denominatore non si annulla. Questi ultimi sono dati da

$$e^z = i\pi = \pi e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z = \log \pi + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i,$$

che sono quindi da escludere dal dominio in cui la funzione è olomorfa.

D.2

Bisogna escudere i punti del piano complesso in cui la funzione non è definita e quindi

$$z = 1,$$

un qualunque insieme semplicemente connesso che esclude questo punto soddisfa le richieste del problema. Ad esempio

$$\mathbb{C} - \{\, (x,y) : y = 0, x \leq 1\}$$