SOLUZIONI COMPITO del 1/02/2013
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice e tenendo conto che $\log[1 + 2/(n^2 + 1)] \sim 2/(n^2 + 1)$, si ha

$$a_n := \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} = \log\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right) \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \sim \frac{2}{n^2+1}\,\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \sim \frac{2}{n^2}\,\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n}\,.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2\,\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n}}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)}}{(\sqrt[n]{n})^2} = \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)} \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha^2 - 1 > 0, \text{ cioè } \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 1; \\ = 1 & \text{se } \alpha^2 = 1, \text{ cioè } \alpha = \pm 1; \\ < 1 & \text{se } \alpha^2 - 1 < 0, \text{ cioè se } -1 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha < -1$ e $\alpha > 1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $-1 < \alpha < 1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = \pm 1$, si ha $a_n \sim \frac{2}{n^2}$, quindi la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che il dominio d'integrazione si può riscrivere nella forma $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$; pertanto, utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi, otteniamo

$$\begin{aligned}
&\iint_T y(4x^5 + 6x^3 + 2x)\,\mathrm{e}^{y^2(x^2+1)+1}\,dx\,dy = \mathrm{e}\int_0^1 (4x^5 + 6x^3 + 2x)\left(\int_0^x y\,\mathrm{e}^{y^2(x^2+1)}\,dy\right) dx \\
=&\frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{4x^5 + 6x^3 + 2x}{x^2+1}\left(\mathrm{e}^{y^2(x^2+1)}\Big|_0^x\right) dx = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 (4x^3 + 2x)\left(\mathrm{e}^{(x^4+x^2)} - 1\right) dx \\
=&\frac{\mathrm{e}}{2}\left(\mathrm{e}^{(x^4+x^2)} - x^4 - x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{2}(\mathrm{e}^2 - 2 - 1) = \frac{\mathrm{e}^3 - 3\mathrm{e}}{2}\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $4x^5 + 6x^3 + 2x = (4x^3 + 2x)(x^2 + 1)$.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea con $a(x) = -\frac{\log x^2}{x} = -2\frac{\log x}{x}$ ed $f(x) = \frac{\log x}{x}$, definite e continue in $(0, +\infty)$. Tenendo conto che

$$-2\int \frac{\log x}{x}\,dx = -\log^2 x + C \qquad \text{e} \qquad \int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{e}^{-\log^2 x}\,dx = -\frac{\mathrm{e}^{-\log^2 x}}{2} + C\,,$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \mathrm{e}^{\log^2 x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\log^2 x}}{2}\right) = K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \frac{1}{2}\,.$$

Poiché se $K \neq 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\left[K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \frac{1}{2}\right] = (-\infty)\cdot \mathrm{sign}(K) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \frac{1}{2}\right] = (+\infty)\cdot\mathrm{sign}(K)\,,$$

l'unica soluzione limitata dell'equazione differenziale si avrà per $K = 0$, e sarà data da $y(x) = -1/2$.

Esercizio 4

Calcoliamo la derivata di f ed osserviamo che

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2e^{2x}-3e^{x})(e^{x}+1)-(e^{2x}-3e^{x})e^{x}}{(e^{x}+1)^2} = \frac{2e^{3x}-3e^{2x}+2e^{2x}-3e^{x}-e^{3x}+3e^{2x}}{(e^{x}+1)^2} \\ &= \frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2}(e^{2x}+2e^{x}-3) \begin{cases} >0 & \text{se } e^{x}>1 \implies x>0, \\ =0 & \text{se } e^{x}=1 \implies x=0, \\ <0 & \text{se } e^{x}<1 \implies x<0. \end{cases} \end{aligned}$$

Per determinare il segno di f', abbiamo tenuto conto che $\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2} > 0$ ed abbiamo effettuato la sostituzione $t = e^{x}$ nel secondo fattore della terza uguaglianza. In questo modo abbiamo ottenuto l'equazione $t^2+2t-3 = 0$, che ha per soluzioni $t = -3$ e $t = 1$. La prima soluzione è stata scartata, in quanto negativa, ed è così rimasta solo la soluzione $t = 1$, che ha portato al risultato precedente. Pertanto, $f'(x) > 0$ per $x > 0$, $f'(x) = 0$ per $x = 0$ ed $f'(x) < 0$ per $x < 0$, quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto per f in $\mathbb{R}$ e il valore minimo assoluto è dato da $f(0) = -1$.

Esercizio 5

L'affermazione $A)$ è vera poiché $\sin x^6 \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.
L'affermazione $B)$ è falsa, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto, cioè in questo caso x^7.
L'affermazione $C)$ è falsa, basta considerare $x^8 = o(x^5)$ ed osservare che $x^7 + x^8 \sim x^7$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.
L'affermazione $D)$ è falsa, basta considerare nuovamente $x^8 = o(x^6)$ ed osservare che $x^6 + x^8 \sim x^6$, per $x \to 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.