SOLUZIONI COMPITO del 1/02/2013
ANALISI MATEMATICA II - 5 CFU
ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1
Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice e tenendo conto che $\log[1+2/(n^2+1)] \sim 2/(n^2+1)$, si ha

$$a_n := \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right) = \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \log\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right) \sim \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \frac{2}{n^2+1} \sim \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n} \frac{2}{n^2}\,.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \to 1$, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2\,\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)n}}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(\alpha^2-1)}}{(\sqrt[n]{n})^2} = \mathrm{e}^{(\alpha^2-1)} \begin{cases} >1 & \text{se } \alpha^2-1>0, \text{ cioè } \alpha<-1 \text{ o } \alpha>1; \\ =1 & \text{se } \alpha^2=1, \text{ cioè } \alpha=\pm1; \\ <1 & \text{se } \alpha^2-1<0, \text{ cioè se } -1<\alpha<1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha<-1$ e $\alpha>1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $-1<\alpha<1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha=\pm1$, si ha $a_n \sim \frac{2}{n^2}$, quindi la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2>1$.

Esercizio 2
Innanzitutto osserviamo che il dominio d'integrazione si può riscrivere nella forma $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$; pertanto, utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi, otteniamo

$$\begin{aligned} &\iint_T y(4x^5+6x^3+2x)\,\mathrm{e}^{y^2(x^2+1)+1}\,dx\,dy = \mathrm{e}\int_0^1 (4x^5+6x^3+2x)\left(\int_0^x y\,\mathrm{e}^{y^2(x^2+1)}\,dy\right)dx \\ =&\frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 \frac{4x^5+6x^3+2x}{x^2+1}\left(\mathrm{e}^{y^2(x^2+1)}\Big|_0^x\right)dx = \frac{\mathrm{e}}{2}\int_0^1 (4x^3+2x)\left(\mathrm{e}^{(x^4+x^2)}-1\right)dx \\ =&\frac{\mathrm{e}}{2}\left(\mathrm{e}^{(x^4+x^2)}-x^4-x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\mathrm{e}}{2}(\mathrm{e}^2-2-1) = \frac{\mathrm{e}^3-3\varepsilon}{2}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $4x^5+6x^3+2x = (4x^3+2x)(x^2+1)$.

Esercizio 3
L'equazione proposta è un'equazione lineare del primo ordine non omogenea con $a(x) = -\frac{\log x^2}{x} = -2\frac{\log x}{x}$ ed $f(x) = \frac{\log x}{x}$, definite e continue in $(0,+\infty)$. Tenendo conto che

$$-2\int \frac{\log x}{x}\,dx = -\log^2 x + C \qquad \text{e} \qquad \int \frac{\log x}{x}\,\mathrm{e}^{-\log^2 x}\,dx = -\frac{\mathrm{e}^{-\log^2 x}}{2} + C\,,$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \mathrm{e}^{\log^2 x}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\log^2 x}}{2}\right) = K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \frac{1}{2}\,.$$

Poiché se $K \ne 0$ abbiamo

$$\lim_{x\to0^+}\left[K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \frac{1}{2}\right] = (-\infty)\cdot\mathrm{sign}(K) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[K\mathrm{e}^{\log^2 x} - \frac{1}{2}\right] = (+\infty)\cdot\mathrm{sign}(K)\,,$$

l'unica soluzione limitata dell'equazione differenziale si avrà per $K=0$, e sarà data da $y(x) = -1/2$.

Esercizio 4
Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[0,1/2) \cup (1/2,1]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[0,a] \cup [b,1]$, con $0 < a < 1/2$ e $1/2 < b < 1$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \to 1/2^{\pm}$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = \sqrt{|2x-1|}$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = |2x-1|^{1/4}$, otteniamo che, per $t \to 1/2^{\pm}$,

$$\begin{aligned}\frac{x(x^2+1)}{\mathrm{e}^{\sqrt{|2x-1|}} - \cos\left(|2x-1|^{1/4}\right)} &\sim \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+1\right)}{1+\sqrt{|2x-1|}-1+\frac{1}{2}\left(|2x-1|^{1/4}\right)^2} \\ &= \frac{5/8}{(3/2)\sqrt{|2x-1|}} = \frac{5}{12\sqrt{2}}\,\frac{1}{|x-1/2|^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1/2 < 1$, l'integrale proposto converge.

Esercizio 5
Ricordando che f è strettamente crescente e $f(0) = 0$, si ricava che $f(s)$ è negativa per ogni $s < 0$; quindi, ponendo $s = -|x|$, ricaviamo che $f(-|x|) < 0$ per ogni $x \neq 0$. Utilizzando il teorema di Torricelli, otteniamo che $F'(x) = f(-|x|)\mathrm{e}^x$ ovvero, per quanto appena osservato e tenendo conto che $\mathrm{e}^x > 0$, $F'(x) < 0$, per ogni $x \neq 0$. Pertanto, la funzione F è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$.