

SOLUZIONI COMPITO del 1/02/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
INGEGNERIA MECCANICA - INGEGNERIA ENERGETICA
INGEGNERIA AMBIENTE e TERRITORIO

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice e tenendo conto che $\log[1 + 2/(n^2 + 1)] \sim 2/(n^2 + 1)$, si ha

$$a_n := \log\left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 1}\right) e^{(\alpha^2 - 1)n} = \log\left(1 + \frac{2}{n^2 + 1}\right) e^{(\alpha^2 - 1)n} \sim \frac{2}{n^2 + 1} e^{(\alpha^2 - 1)n} \sim \frac{2}{n^2} e^{(\alpha^2 - 1)n}.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{2e^{(\alpha^2 - 1)n}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{(\alpha^2 - 1)}}{(\sqrt[n]{n})^2} = e^{(\alpha^2 - 1)} \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha^2 - 1 > 0, \text{ cioè } \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 1; \\ = 1 & \text{se } \alpha^2 = 1, \text{ cioè } \alpha = \pm 1; \\ < 1 & \text{se } \alpha^2 - 1 < 0, \text{ cioè se } -1 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha < -1$ e $\alpha > 1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $-1 < \alpha < 1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = \pm 1$, si ha $a_n \sim \frac{2}{n^2}$, quindi la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2 - 2w + 2 = 0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w = 1 + \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{1 + i} = \sqrt[4]{2} \sqrt{e^{\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2} e^{\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2} e^{9\pi i/8}; \end{cases} \quad z_{3,4} = \sqrt{1 - i} = \sqrt[4]{2} \sqrt{e^{-\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2} e^{-\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2} e^{7\pi i/8}. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := \frac{\log x^2}{x}$ ed $h(y) := \frac{[y^4 - 4]^2}{4y^3}$. Poiché $g \in C^0(0, +\infty)$ e $h \in C^1((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(1)$ del punto iniziale $x_0 = 1$ ed un'unica funzione $y \in C^1(I(1))$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y) = 0$ per $y = \pm\sqrt{2}$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x) \equiv \sqrt{2}$ e $y(x) \equiv -\sqrt{2}$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha = \sqrt{2}$ e per $\alpha = -\sqrt{2}$.

Invece, per $\alpha \neq 0; \pm\sqrt{2}$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{y^4(x) - 4} = \int \frac{4y^3}{(y^4 - 4)^2} dy = 2 \int \frac{\log x}{x} dx = \log^2 x + C \quad \Rightarrow \quad y^4(x) = 4 - \frac{1}{\log^2 x + C}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^4 = 4 - 1/C$, da cui $C = 1/(4 - \alpha^4)$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt[4]{4 - \frac{1}{\log^2 x + 1/(4 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{4(4 - \alpha^4) \log^2 x + \alpha^4}{(4 - \alpha^4) \log^2 x + 1}} \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ (e } \alpha \neq \sqrt{2});$$

$$y(x) = -\sqrt[4]{4 - \frac{1}{\log^2 x + 1/(4 - \alpha^4)}} = -\sqrt[4]{\frac{4(4 - \alpha^4) \log^2 x + \alpha^4}{(4 - \alpha^4) \log^2 x + 1}} \quad \text{se } \alpha < 0 \text{ (e } \alpha \neq -\sqrt{2}).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[0, a] \cup [b, 1]$, con $0 < a < 1/2$ e $1/2 < b < 1$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \rightarrow 1/2^\pm$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = \sqrt{|2x-1|}$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = |2x-1|^{1/4}$, otteniamo che, per $t \rightarrow 1/2^\pm$,

$$\begin{aligned} \frac{x(x^2 + 1)}{e^{\sqrt{|2x-1|}} - \cos(|2x-1|^{1/4})} &\sim \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + 1\right)}{1 + \sqrt{|2x-1|} - 1 + \frac{1}{2} (|2x-1|^{1/4})^2} \\ &= \frac{5/8}{(3/2)\sqrt{|2x-1|}} = \frac{5}{12\sqrt{2}} \frac{1}{|x-1/2|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1/2 < 1$, l'integrale proposto converge.

Esercizio 5

L'affermazione *A*) è vera poiché $\sin x^6 \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

L'affermazione *B*) è falsa, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto, cioè in questo caso x^7 .

L'affermazione *C*) è falsa, basta considerare $x^8 = o(x^5)$ ed osservare che $x^7 + x^8 \sim x^7$, per $x \rightarrow 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

L'affermazione *D*) è falsa, basta considerare nuovamente $x^8 = o(x^6)$ ed osservare che $x^6 + x^8 \sim x^6$, per $x \rightarrow 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice, si ha

$$a_n := (2 + \alpha)^n n \sin\left(\frac{n+4}{n+2}\right) = (2 + \alpha)^n n \sin\left(1 + \frac{2}{n+2}\right) \sim (2 + \alpha)^n n \sin 1.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{(2 + \alpha)^n n \sin 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + \alpha) \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\sin 1} = (2 + \alpha) \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha > -1; \\ = 1 & \text{se } \alpha = -1; \\ < 1 & \text{se } -2 \leq \alpha < -1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha > -1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $-2 \leq \alpha < -1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = -1$, si ha $a_n \sim n \sin 1 \rightarrow +\infty$, quindi la serie non converge né assolutamente né semplicemente poiché di nuovo il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2 - 4w + 8 = 0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w = 2 + \sqrt{4-8} = 2 \pm 2i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{2+2i} = \sqrt[4]{8} \sqrt{e^{\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8} e^{\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{8} e^{9\pi i/8}; \end{cases} \quad z_{3,4} = \sqrt{2-2i} = \sqrt[4]{8} \sqrt{e^{-\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8} e^{-\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{8} e^{7\pi i/8}. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := \frac{\log^2(x+1)}{x+1}$ ed $h(y) := \frac{[y^2-4]^4}{2y}$. Poiché $g \in \mathcal{C}^0(-1, +\infty)$ e $h \in \mathcal{C}^1((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(0)$ del punto iniziale $x_0 = 0$ ed un'unica funzione $y \in \mathcal{C}^1(I(0))$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y) = 0$ per $y = \pm 2$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x) \equiv 2$ e $y(x) \equiv -2$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(-1, +\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha = 2$ e per $\alpha = -2$.

Invece, per $\alpha \neq 0; \pm 2$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{3[y^2(x)-4]^3} = \int \frac{2y}{(y^2-4)^4} dy = \int \frac{\log^2(x+1)}{x+1} dx = \frac{\log^3(x+1)}{3} + C$$

$$\implies y^2(x) = 4 - \frac{1}{\sqrt[3]{\log^3(x+1) + C}}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^2 = 4 - 1/\sqrt[3]{C}$, da cui $C = 1/(4 - \alpha^2)^3$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{4 - \frac{1}{\sqrt[3]{\log^3(x+1) + 1/(4 - \alpha^2)^3}}} = \sqrt{4 - \frac{4 - \alpha^2}{\sqrt[3]{(4 - \alpha^2)^3 \log^3(x+1) + 1}}} \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ (e } \alpha \neq 2);$$

$$y(x) = -\sqrt{4 - \frac{1}{\sqrt[3]{\log^3(x+1) + 1/(4 - \alpha^2)^3}}} = -\sqrt{4 - \frac{4 - \alpha^2}{\sqrt[3]{(4 - \alpha^2)^3 \log^3(x+1) + 1}}} \quad \text{se } \alpha < 0 \text{ (e } \alpha \neq -2).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[-3/4, -1/2) \cup (-1/2, -1/4]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[-3/4, a] \cup [b, -1/4]$, con $-3/4 < a < -1/2$ e $-1/2 < b < -1/4$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \rightarrow -1/2^\pm$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = (4x + 2)^4$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = (4x + 2)^2$, otteniamo che, per $t \rightarrow -1/2^\pm$,

$$\begin{aligned} \frac{(3x+2)(2x-1)}{\sqrt[3]{\cosh(4x+2)^2 + \sin(4x+2)^4 - 1}} &\sim \frac{\left(-\frac{3}{2} + 2\right)(-1-1)}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}[(4x+2)^2]^2 + (4x+2)^4 - 1}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{2}(4x+2)^4}} = -\frac{1}{4\sqrt[3]{6}} \frac{1}{(x+1/2)^{4/3}}. \end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $4/3 \geq 1$, l'integrale proposto diverge.

Esercizio 5

L'affermazione *A*) è falsa poiché $\log(1+x^6) \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso x^5 .

L'affermazione *B*) è vera, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto.

L'affermazione *C*) è falsa, basta considerare $1/x^8 = o(1/x^5)$, per $x \rightarrow +\infty$, ed osservare che, per $x \rightarrow +\infty$, $1/x^7$ e $1/x^8$ sono infinitesimi, pertanto, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso $1/x^7 = (1/x)^7$.

L'affermazione *D*) è falsa, basta considerare $x^4 = o(x^3)$ ed osservare che $x^5 + x^4 \sim x^4$, per $x \rightarrow 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice, si ha

$$a_n := \frac{1}{(\alpha - 3)^n} n^2 \sin\left(\frac{n^3 + 5}{n^3 + 1}\right) = \frac{1}{(\alpha - 3)^n} n^2 \sin\left(1 + \frac{4}{n^3 + 1}\right) \sim \frac{1}{(\alpha - 3)^n} n^2 \sin 1.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\alpha - 3)^n} n^2 \sin 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha - 3)} (\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{\sin 1} = \frac{1}{(\alpha - 3)} \begin{cases} > 1 & \text{se } \alpha - 3 < 1, \text{ cioè se } 3 < \alpha < 4; \\ = 1 & \text{se } \alpha - 3 = 1, \text{ cioè se } \alpha = 4; \\ < 1 & \text{se } \alpha - 3 > 1, \text{ cioè se } \alpha > 4. \end{cases}$$

Pertanto, per $3 < \alpha < 4$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $\alpha > 4$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = 4$, si ha $a_n \sim n^2 \sin 1 \rightarrow +\infty$, quindi la serie non converge né assolutamente né semplicemente poiché di nuovo il termine generale non è infinitesimo.

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2 + 4w + 8 = 0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w = -2 + \sqrt{4 - 8} = -2 \pm 2i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{-2 + 2i} = \sqrt[4]{8} \sqrt{e^{3\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8} e^{3\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{8} e^{11\pi i/8}; \end{cases} \quad z_{3,4} = \sqrt{-2 - 2i} = \sqrt[4]{8} \sqrt{e^{-3\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{8} e^{-3\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{8} e^{5\pi i/8}. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := 2 \frac{\log^3 x}{x}$ ed $h(y) := \frac{[y^2 - 3]^4}{y}$. Poiché $g \in C^0(0, +\infty)$ e $h \in C^1((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(1)$ del punto iniziale $x_0 = 1$ ed un'unica funzione $y \in C^1(I(1))$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y) = 0$ per $y = \pm\sqrt{3}$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x) \equiv \sqrt{3}$ e $y(x) \equiv -\sqrt{3}$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(0, +\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha = \sqrt{3}$ e per $\alpha = -\sqrt{3}$.

Invece, per $\alpha \neq 0; \pm\sqrt{3}$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{6[y^2(x) - 3]^3} = \int \frac{y}{(y^2 - 3)^4} dy = 2 \int \frac{\log^3 x}{x} dx = \frac{\log^4 x}{2} + C \quad \implies \quad y^2(x) = 3 - \sqrt[3]{\frac{1}{3 \log^4 x + C}}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^2 = 3 - 1/\sqrt[3]{C}$, da cui $C = 1/(3 - \alpha^2)^3$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3 \log^4 x + 1/(3 - \alpha^2)^3}}} = \sqrt{3 - \frac{3 - \alpha^2}{\sqrt[3]{3(3 - \alpha^2)^3 \log^4 x + 1}}} \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ (e } \alpha \neq \sqrt{3}\text{);}$$

$$y(x) = -\sqrt{3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3 \log^4 x + 1/(3 - \alpha^2)^3}}} = -\sqrt{3 - \frac{3 - \alpha^2}{\sqrt[3]{3(3 - \alpha^2)^3 \log^4 x + 1}}} \quad \text{se } \alpha < 0 \text{ (e } \alpha \neq -\sqrt{3}\text{)}.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[-2/3, -1/3) \cup (-1/3, 0]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[-2/3, a] \cup [b, 0]$, con $-2/3 < a < -1/3$ e $-1/3 < b < 0$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \rightarrow -1/3^\pm$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = (3x + 1)^2$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = (3x + 1)$, otteniamo che, per $t \rightarrow -1/3^\pm$,

$$\begin{aligned} \frac{(x-2)(2x+3)}{\sqrt{\cosh(3x+1) + \sin(3x+1)^2 - 1}} &\sim \frac{\left(-\frac{1}{3} - 2\right) \left(-\frac{2}{3} + 3\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(3x+1)^2 + (3x+1)^2 - 1}} \\ &= -\frac{49/9}{\sqrt{\frac{3}{2}(3x+1)^2}} = -\frac{49\sqrt{2}}{27\sqrt{3}} \frac{1}{|x+1/3|}. \end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1 \geq 1$, l'integrale proposto diverge.

Esercizio 5

L'affermazione *A*) è falsa poiché $\log(1+x^6) \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso x^5 .

L'affermazione *B*) è vera, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto.

L'affermazione *C*) è falsa, basta considerare $1/x^8 = o(1/x^5)$, per $x \rightarrow +\infty$, ed osservare che, per $x \rightarrow +\infty$, $1/x^7$ e $1/x^8$ sono infinitesimi, pertanto, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso, cioè in questo caso $1/x^7 = (1/x)^7$.

L'affermazione *D*) è falsa, basta considerare $x^4 = o(x^3)$ ed osservare che $x^5 + x^4 \sim x^4$, per $x \rightarrow 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è a termini di segno alterno. Studiamone dapprima la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice e tenendo conto che $\log[1 + 1/(n^3 + 3)] \sim 1/(n^3 + 3)$, si ha

$$a_n := \log\left(\frac{n^3 + 4}{n^3 + 3}\right) \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)n}} = \log\left(1 + \frac{1}{n^3 + 3}\right) \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)n}} \sim \frac{1}{n^3 + 3} \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)n}} \sim \frac{1}{n^3} \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)n}}.$$

Ricordando il limite notevole $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3} \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^3} \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)}} = \frac{1}{e^{(\alpha^2 - \alpha)}} \begin{cases} < 1 & \text{se } \alpha^2 - \alpha > 0, \text{ cioè } \alpha < 0 \text{ o } \alpha > 1; \\ = 1 & \text{se } \alpha^2 - \alpha = 0, \text{ cioè } \alpha = 0; 1; \\ > 1 & \text{se } \alpha^2 - \alpha < 0, \text{ cioè se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Pertanto, per $0 < \alpha < 1$, la serie proposta non converge né assolutamente né semplicemente, in quanto in tal caso il criterio fornisce l'informazione che il termine generale non è infinitesimo; per $\alpha < 0$ e $\alpha > 1$, la serie proposta converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente. Infine, per $\alpha = 0; 1$, si ha $a_n \sim \frac{1}{n^3}$, quindi la serie converge assolutamente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

Esercizio 2

Ponendo $w = z^2$, l'equazione proposta si riscrive nella forma $w^2 + 2w + 2 = 0$ che, utilizzando la formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, conduce a $w = -1 + \sqrt{1 - 2} = -1 \pm i$. Pertanto,

$$z_{1,2} = \sqrt{-1 + i} = \sqrt[4]{2} \sqrt{e^{3\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2} e^{3\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2} e^{11\pi i/8}; \end{cases} \quad z_{3,4} = \sqrt{-1 - i} = \sqrt[4]{2} \sqrt{e^{-3\pi i/4}} = \begin{cases} \sqrt[4]{2} e^{-3\pi i/8}; \\ \sqrt[4]{2} e^{5\pi i/8}. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili dove $g(x) := \frac{\log(x+1)^3}{x+1}$ ed $h(y) := \frac{[y^4 - 1]^2}{2y^3}$. Poiché $g \in C^0(-1, +\infty)$ e $h \in C^1((-\infty, 0) \cup (0, +\infty))$, dal teorema di esistenza ed unicità in piccolo si ricava che esiste un intorno $I(0)$ del punto iniziale $x_0 = 0$ ed un'unica funzione $y \in C^1(I(0))$ soluzione del problema di Cauchy proposto, per ogni $\alpha \neq 0$.

Poiché $h(y) = 0$ per $y = \pm 1$, abbiamo due integrali singolari dati da $y(x) \equiv 1$ e $y(x) \equiv -1$, che sono soluzioni (in tutto l'intervallo $(-1, +\infty)$) del problema di Cauchy, rispettivamente, per $\alpha = 1$ e per $\alpha = -1$.

Invece, per $\alpha \neq 0; \pm 1$, la soluzione del problema va cercata separando le variabili. In tal caso otteniamo

$$-\frac{1}{2[y^4(x) - 1]} = \int \frac{2y^3}{(y^4 - 1)^2} dy = 3 \int \frac{\log(x+1)}{x+1} dx = \frac{3 \log^2(x+1)}{2} + C$$

$$\implies y^4(x) = 1 - \frac{1}{3 \log^2(x+1) + C}.$$

Imponendo ora la condizione iniziale ricaviamo $\alpha^4 = 1 - 1/C$, da cui $C = 1/(1 - \alpha^4)$. Quindi, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt[4]{1 - \frac{1}{3 \log^2(x+1) + 1/(1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \alpha^4) \log^2(x+1) + \alpha^4}{3(1 - \alpha^4) \log^2(x+1) + 1}} \quad \text{se } \alpha > 0 \text{ (e } \alpha \neq 1);$$

$$y(x) = -\sqrt[4]{1 - \frac{1}{3 \log^2(x+1) + 1/(1 - \alpha^4)}} = -\sqrt[4]{\frac{3(1 - \alpha^4) \log^2(x+1) + \alpha^4}{3(1 - \alpha^4) \log^2(x+1) + 1}} \quad \text{se } \alpha < 0 \text{ (e } \alpha \neq -1).$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che la funzione integranda è continua in $[0, 2/3) \cup (2/3, 1]$, quindi è integrabile in senso proprio in tutti gli insiemi della forma $[0, a] \cup [b, 1]$, con $0 < a < 2/3$ e $2/3 < b < 1$. Pertanto, per stabilire se l'integrale improprio converge è sufficiente studiare il comportamento della funzione per $x \rightarrow 2/3^\pm$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = (3x - 2)^2$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 3x - 2$, otteniamo che, per $t \rightarrow 2/3^\pm$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2(3x+1)}{[e^{(3x-2)^2} - \cos(3x-2)]^{1/4}} &\sim \frac{\frac{4}{9}(2+1)}{[1 + (3x-2)^2 - 1 + \frac{1}{2}(3x-2)^2]^{1/4}} \\ &= \frac{4/3}{\sqrt[4]{(3/2)(3x-2)^2}} = \frac{4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{27}} \frac{1}{|x-2/3|^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico per integrali, possiamo concludere che, essendo $1/2 < 1$, l'integrale proposto converge.

Esercizio 5

L'affermazione *A*) è vera poiché $\sin x^6 \sim x^6$ e, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

L'affermazione *B*) è falsa, poiché fra infiniti di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più alto, cioè in questo caso x^7 .

L'affermazione *C*) è falsa, basta considerare $x^8 = o(x^5)$ ed osservare che $x^7 + x^8 \sim x^7$, per $x \rightarrow 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.

L'affermazione *D*) è falsa, basta considerare nuovamente $x^8 = o(x^6)$ ed osservare che $x^6 + x^8 \sim x^6$, per $x \rightarrow 0$, poiché, come detto prima, fra infinitesimi di tipo potenza, il termine dominante è la potenza di esponente più basso.