SOLUZIONI COMPITO del 4/07/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
INGEGNERIA MECCANICA - INGEGNERIA ENERGETICA
INGEGNERIA AMBIENTE e TERRITORIO

TEMA A

Esercizio 1

Tenendo che $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\mathrm{e}^{i\pi/4}$, possiamo riscrivere z nel modo seguente:

$$z=\frac{2\mathrm{e}^{i\pi/2}}{2\mathrm{e}^{i\pi/4}}=\mathrm{e}^{i\pi/4}=\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\,.$$

Inoltre,

$$z^7=\mathrm{e}^{7i\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t\mapsto\cos t$, con $t=\sin\frac{1}{n^{3/4}}$, e quello al primo ordine per la funzione $t\mapsto\sin t$, con $t=\frac{1}{n^{3/4}}$, otteniamo

$$a_n:=n^{3/4}\left[1-\cos\left(\sin\frac{1}{n^{3/4}}\right)\right]\sim n^{3/4}\left[1-1+\frac{\left(\sin\frac{1}{n^{3/4}}\right)^2}{2}\right]=n^{3/4}\frac{\left(\sin\frac{1}{n^{3/4}}\right)^2}{2}\sim n^{3/4}\frac{1}{2(n^{3/4})^2}=\frac{1}{2n^{3/4}}\,.$$

Poiché $3/4<1$, dal criterio del confronto asintotico si ricava che la serie proposta diverge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare omogenea del primo ordine, in quanto può essere riscritta nella forma $y'(x)-(x\log x)y(x)=0$. Utilizzando, quindi, la formula risolutiva e tenendo conto che

$$\int_1^x t\log t\,dt=\frac{x^2}{2}\log x-\int_1^x\frac{t^2}{2}\,\frac{1}{t}\,dt=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\,,$$

e $y(1)=1$ otteniamo che la soluzione richiesta sarà $y(x)=\sqrt[4]{\mathrm{e}}\,\frac{x^{x^2/2}}{\mathrm{e}^{x^2/4}}$.

Esercizio 4

Osserviamo che per $\alpha<-3$ e $\alpha>3$ la funzione integranda è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-3,3]$, pertanto l'integrale esiste finito nel senso di Riemann, cioè in senso proprio. Se, invece, $\alpha\in[-3,3]\setminus\{1\}$, otteniamo che, in un intorno di $x=-\alpha$, $f(x)=\left|\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+\alpha}\right|\sim\left|\frac{(-\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1)}{x+\alpha}\right|=\frac{C}{|x+\alpha|}$, che non è integrabile in senso improprio, per il criterio del confronto asintotico per integrali. Infine, se $\alpha=1$, si ha $f(x)=\left|\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}\right|=(x^2-x+1)$, cioè f è prolungabile con continuità in tutto l'intervallo chiuso e limitato $[-3,3]$, pertanto essa è integrabile in senso proprio.

Esercizio 5

L'affermazione **a)** è falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione $f(x)=\sin x$, che è definita su tutto $[0,+\infty)$, è limitata, ma non ammette limite per $x\to+\infty$.

Anche l'affermazione **b)** falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0,\\ 0 & \text{se } x=0.\end{cases}$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$; è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili; risulta essere continua e derivabile anche in $x=0$, in quanto

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)\quad\text{in quanto } x\mapsto\sin\tfrac{1}{x}\text{ è limitata in un intorno dell'origine;}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0=:f'(0)\,.$$

Tuttavia, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ non è regolare per $x\to0$.

TEMA B

Esercizio 1

Tenendo che $\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\mathrm{e}^{7i\pi/4}$, possiamo riscrivere z nel modo seguente:

$$z = \frac{2\mathrm{e}^{3i\pi/2}}{2\mathrm{e}^{7i\pi/4}} = \mathrm{e}^{-i\pi/4} = \cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\,.$$

Inoltre,

$$z^7 = \mathrm{e}^{-7i\pi/4} = \mathrm{e}^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = \sinh\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, e quello al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = \frac{1}{n^{3/2}}$, otteniamo

$$a_n := n^{3/2}\left[\cosh\left(\sinh\frac{1}{n^{3/2}}\right) - 1\right] \sim n^{3/2}\frac{\left[\sinh\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]^2}{2} = n^{3/2}\frac{\sinh^2\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}{2} \sim n^{3/2}\frac{1}{2(n^{3/2})^2} = \frac{1}{2n^{3/2}}\,.$$

Poiché $3/2 > 1$, dal criterio del confronto asintotico si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare omogenea del primo ordine, in quanto può essere riscritta nella forma $y'(x) - (3x^2\log x)y(x) = 0$. Utilizzando, quindi, la formula risolutiva e tenendo conto che

$$\int_1^x 3t^2\log t\,dt = x^3\log x - \int_1^x t^3\,\frac{1}{t}\,dt = x^3\log x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\,,$$

e $y(1) = 1$ otteniamo che la soluzione richiesta sarà $y(x) = \sqrt[3]{\mathrm{e}}\,\frac{x^{x^3}}{\mathrm{e}^{x^3/3}}$.

Esercizio 4

Osserviamo che per $\alpha < -2$ e $\alpha > 2$ la funzione integranda è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, pertanto l'integrale esiste finito nel senso di Riemann, cioè in senso proprio. Se, invece, $\alpha \in [-2, 2] \setminus \{-1\}$, otteniamo che, in un intorno di $x = -\alpha$, $f(x) = \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+\alpha}\right| \sim \left|\frac{(-\alpha-1)(\alpha^2-\alpha+1)}{x+\alpha}\right| = \frac{C}{|x+\alpha|}$, che non è integrabile in senso improprio, per il criterio del confronto asintotico per integrali. Infine, se $\alpha = -1$, si ha $f(x) = \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}\right| = (x^2 + x + 1)$, cioè f è prolungabile con continuità in tutto l'intervallo chiuso e limitato $[-2, 2]$, pertanto essa è integrabile in senso proprio.

Esercizio 5

L'affermazione **a)** è falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione $f(x) = \sin x$, che è definita su tutto $[0, +\infty)$, è limitata, ma non ammette limite per $x \to +\infty$.

Anche l'affermazione **b)** falsa, infatti basta considerare, ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Essa è definita su tutto $\mathbb{R}$; è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili; risulta essere continua e derivabile anche in $x = 0$, in quanto

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} x^2\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0) \quad \text{in quanto } x \mapsto \sin\tfrac{1}{x} \text{ è limitata in un intorno dell'origine;}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x} = 0 =: f'(0)\,.$$

Tuttavia, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ non è regolare per $x \to 0$.