SOLUZIONI COMPITO del 8/01/2013
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che il limite proposto può essere riscritto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right]} .$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$ e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{1}{n+1}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim -\frac{1}{2n^2}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che, per $\alpha > 0$,

$$\log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right]\sim \sin\frac{1}{(n+2)^\alpha}\sim\frac{1}{(n+2)^\alpha}\sim\frac{1}{n^\alpha}\,,$$

ricaviamo

$$\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}\log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right]\sim\frac{1}{-\frac{1}{2n^2}}\log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right]$$

$$\sim\begin{cases}-2n^2\log\left[1+\sin 1\right]\to-\infty & \text{se } \alpha=0;\\ -2n^2\frac{1}{(n+2)^\alpha}\sim-\frac{2}{n^{\alpha-2}}\to\begin{cases}-\infty & \text{se } 0<\alpha<2;\\ -2 & \text{se } \alpha=2;\\ 0 & \text{se } \alpha>2.\end{cases}\end{cases}$$

Quindi, per il limite proposto avremo

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \log\left[1+\sin\frac{1}{(n+2)^\alpha}\right]}=\begin{cases}0 & \text{se } 0\le\alpha<2;\\ 1/\mathrm{e}^2 & \text{se } \alpha=2;\\ 1 & \text{se } \alpha>2.\end{cases}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$a+ib+i\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}+a^2-b^2\,,$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases}a=\sqrt{a^2+b^2}+a^2-b^2\,,\\ b+\sqrt{a^2+b^2}=0\,,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}b\le 0\,,\\ \sqrt{a^2+b^2}=-b\,,\\ a+b=(a-b)(a+b)\,,\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}b\le 0\,,\\ a=-b\\ \sqrt{2}a=a\,,\end{cases}\text{ che fornisce } a=b=0\text{; oppure }\begin{cases}b\le 0\,,\\ a=b+1\\ 2b^2+2b+1=b^2\,,\end{cases}\text{ che fornisce } a=0 \text{ e } b=-1.$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni $z = 0$ e $z = -i$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 1; -2$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo che, per $\alpha \neq \pm 1$, una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A e^{\alpha^2 x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$A\alpha^4 e^{\alpha^2 x} + A\alpha^2 e^{\alpha^2 x} - 2Ae^{\alpha^2 x} = 2e^{\alpha^2 x} \quad \Longrightarrow \quad A(\alpha^4 + \alpha^2 - 2) = 2\,,$$

da cui $A = 2/(\alpha^4 + \alpha^2 - 2)$. Se, invece, $\alpha = \pm 1$, sempre utilizzando il metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Axe^x$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$2Ae^x + Axe^x + Ae^x + Axe^x - 2Axe^x = 2e^x \quad \Longrightarrow \quad 3A = 2\,,$$

da cui $A = 2/3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{\alpha^4+\alpha^2-2}\, e^{\alpha^2 x} & \text{se } \alpha \neq \pm 1; \\ C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{3}\, x\, e^x & \text{se } \alpha = \pm 1. \end{cases}$$

Esercizio 4
Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, dobbiamo imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \left|\log^2(2x+1) - 3\log(2x+1)\right| \neq 0\,, \\ 2x+1 > 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \log(2x+1)(\log(2x+1) - 3) \neq 0\,, \\ x > -1/2\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0\,,\ x \neq \dfrac{e^3 - 1}{2}\,, \\ x > -1/2\,. \end{cases}$$

Quindi, $E = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{e^3-1}{2}\right) \cup \left(\frac{e^3-1}{2}, +\infty\right)$. Inoltre

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty && \Longrightarrow \quad x = -1/2 \text{ è asintoto verticale;} \\
&\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = -\infty && \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ è asintoto verticale;} \\
&\lim_{x \to \frac{e^3-1}{2}^\pm} f(x) = -\infty && \Longrightarrow \quad x = \tfrac{e^3-1}{2} \text{ è asintoto verticale;} \\
&\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log(\log^2 x) = +\infty && \Longrightarrow \quad \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo.}
\end{aligned}$$

Esercizio 5
L'affermazione (A) è corretta, poiché per ipotesi $a_n b_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = o(1)\frac{1}{n^{3/2}} \leq C\frac{1}{n^{3/2}}$ e la serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge.
L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, da cui si ricava $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{n \log n}$, che è il termine generale di una serie divergente.
L'affermazione (C) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n \log n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, da cui si ricava $\left|(-1)^n \frac{a_n^2}{b_n^2}\right| = \frac{1}{n \log^2 n}$, che è il termine generale di una serie convergente.
L'affermazione (D) è corretta, poiché per ipotesi $\frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{o\left(\frac{1}{n}\right)} \to +\infty$, quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.

TEMA B

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che il limite proposto può essere riscritto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{2}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \log\left[1+\tan\frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}}\right]} .$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \tan t$ e per la funzione $t \mapsto \arctan t$, con $t = \frac{1}{n}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{2}{3n^3} .\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che, per $\alpha > 2$,

$$\log\left[1+\tan\frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}}\right] \sim \tan\frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}} \sim \frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}} \sim \frac{1}{n^{\alpha-2}} ,$$

ricaviamo

$$\frac{2}{\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \log\left[1+\tan\frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}}\right] \sim \frac{2}{\frac{2}{3n^3}} \log\left[1+\tan\frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}}\right]$$

$$\sim \begin{cases} 3n^3 \log\left[1+\tan 1\right] \to +\infty & \text{se } \alpha = 2; \\ 3n^3\,\frac{1}{n^{\alpha-2}} \sim \frac{3}{n^{\alpha-5}} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } 2 < \alpha < 5; \\ 3 & \text{se } \alpha = 5; \\ 0 & \text{se } \alpha > 5. \end{cases} \end{cases}$$

Quindi, per il limite proposto avremo

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{2}{\tan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)} \log\left[1+\tan\frac{1}{(n+1)^{\alpha-2}}\right]} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 2 \le \alpha < 5; \\ \mathrm{e}^3 & \text{se } \alpha = 5; \\ 1 & \text{se } \alpha > 5. \end{cases}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$a + ib + i(a^2+b^2) = a^2 + b^2 - b ,$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} a = a^2 + b^2 - b , \\ b + a^2 + b^2 = 0 , \end{cases} \implies \begin{cases} b \le 0 , \\ a^2 + b^2 = -b , \\ a = -2b , \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} b \le 0 , \\ a = -2b \\ -2b = 5b^2 - b , \end{cases} \quad \text{che fornisce } a = b = 0;\text{ oppure} \quad \begin{cases} b \le 0 , \\ a = -2b \\ 5b + 1 = 0 , \end{cases} \quad \text{che fornisce } a = \tfrac{2}{5} \text{ e } b = -\tfrac{1}{5}.$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni $z = 0$ e $z = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - (\alpha+2)\lambda + 2\alpha = 0$. Essendo $\alpha \neq 2$, essa ha come soluzioni $\lambda = \alpha; 2$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo che, per $\alpha \neq 3$, una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$9A\mathrm{e}^{3x} - 3A(\alpha+2)\mathrm{e}^{3x} + 2A\alpha\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \quad \Longrightarrow \quad A(3-\alpha) = 1\,,$$

da cui $A = 1/(3-\alpha)$. Se, invece, $\alpha = 3$, sempre utilizzando il metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{3x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$6A\mathrm{e}^{3x} + 9Ax\mathrm{e}^{3x} - 5A\mathrm{e}^{3x} - 15Ax\mathrm{e}^{3x} + 6Ax\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \quad \Longrightarrow \quad A = 1\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3-\alpha}\,\mathrm{e}^{3x} & \text{se } \alpha \neq 3,\ \alpha \neq 2; \\ C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + x\,\mathrm{e}^{3x} & \text{se } \alpha = 3. \end{cases}$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che $\log \frac{1}{|\log^2(3x+2) - 4\log(3x+2)|} = -\log\left|\log^2(3x+2) - 4\log(3x+2)\right|$. Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, dobbiamo imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \left|\log^2(3x+2) - 4\log(3x+2)\right| \neq 0\,, \\ 3x+2 > 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \log(3x+2)(\log(3x+2)-4) \neq 0\,, \\ x > -2/3\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq -1/3\,,\ x \neq \dfrac{\mathrm{e}^4 - 2}{3}\,, \\ x > -2/3\,. \end{cases}$$

Quindi, $E = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{\mathrm{e}^4-2}{3}\right) \cup \left(\frac{\mathrm{e}^4-2}{3}, +\infty\right)$. Inoltre

$$\lim_{x\to -\frac{2}{3}^+} f(x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad x = -2/3 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}^\pm} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad x = -1/3 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to \frac{\mathrm{e}^4-2}{3}^\pm} f(x) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{\mathrm{e}^4-2}{3} \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\log(\log^2 x) = -\infty \quad \Longrightarrow \quad \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo.}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n\log n}}$, da cui si ricava $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{\log n}{n}$, che è il termine generale di una serie divergente.

L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$, da cui si ricava $\frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{n^2}$, che è il termine generale di una serie convergente.

L'affermazione (C) è corretta, poiché per ipotesi $|(-1)^n a_n b_n| = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = o(1)\frac{1}{n^{3/2}} \leq C\frac{1}{n^{3/2}}$ e la serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

L'affermazione (D) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, da cui si ricava $\sqrt{a_n}\,b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie convergente.

TEMA C

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che il limite proposto può essere riscritto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{8}{\tan\left(\frac{1}{n+2}\right)-\tanh\left(\frac{1}{n+2}\right)}\,\log\left[1+\arctan\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\right]}\,.$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \tan$ e per la funzione $t \mapsto \tanh t$, con $t = \frac{1}{n+2}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{8}{\tan\left(\frac{1}{n+2}\right)-\tanh\left(\frac{1}{n+2}\right)} &= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n+2)^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(n+2)^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{(n+2)^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\sim\frac{2}{3n^3}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che, per $\alpha > 1$,

$$\log\left[1+\arctan\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\right]\sim\arctan\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\sim\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\sim\frac{1}{2^{\alpha-1}n^{\alpha-1}}\,,$$

ricaviamo

$$\frac{8}{\tan\left(\frac{1}{n+2}\right)-\tanh\left(\frac{1}{n+2}\right)}\log\left[1+\arctan\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\right]\sim\frac{8}{\frac{2}{3n^3}}\log\left[1+\arctan\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\right]$$

$$\sim\begin{cases}12n^3\log\left[1+\pi/4\right]\to+\infty & \text{se } \alpha=1;\\ 12n^3\frac{1}{2^{\alpha-1}n^{\alpha-1}}\sim\frac{12}{2^{\alpha-1}n^{\alpha-4}}\to\begin{cases}+\infty\\ 3/2\\ 0\end{cases} & \begin{array}{l}\text{se } 1<\alpha<4;\\ \text{se } \alpha=4;\\ \text{se } \alpha>4.\end{array}\end{cases}$$

Quindi, per il limite proposto avremo

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{8}{\tan\left(\frac{1}{n+2}\right)-\tanh\left(\frac{1}{n+2}\right)}}\log\left[1+\arctan\frac{1}{(2n)^{\alpha-1}}\right]=\begin{cases}+\infty & \text{se } 1\le\alpha<4;\\ \mathrm{e}^{3/2} & \text{se } \alpha=4;\\ 1 & \text{se } \alpha>4.\end{cases}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$-ia+b+a^2+b^2=i(a^2+b^2)+ib\,,$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases}b+a^2+b^2=0\,,\\ -a=a^2+b^2+b\,,\end{cases}\implies\begin{cases}b\le0\,,\\ a^2+b^2=-b\,,\\ -a=0\,,\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}b\le0\,,\\ a=0\\ b^2+b=0\,,\end{cases}\implies\begin{cases}b\le0\,,\\ a=0\\ b(b+1)=0\,,\end{cases}\quad\text{che fornisce } a=0 \text{ e } b=0;-1.$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni $z = 0$ e $z = -i$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + (4-\alpha)\lambda - 4\alpha = 0$. Essendo $\alpha \neq -4$, essa ha come soluzioni $\lambda = \alpha; -4$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo che, per $\alpha \neq 2$, una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4A\mathrm{e}^{2x} + 2A(4-\alpha)\mathrm{e}^{2x} - 4\alpha A\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{\alpha^2 x} \quad \Longrightarrow \quad A(12-6\alpha) = 2\,,$$

da cui $A = 1/(6-3\alpha)$. Se, invece, $\alpha = 2$, sempre utilizzando il metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4A\mathrm{e}^{2x} + 4Ax\mathrm{e}^{2x} + 2A\mathrm{e}^{2x} + 4Ax\mathrm{e}^{2x} - 8Ax\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \quad \Longrightarrow \quad 6A = 2\,,$$

da cui $A = 1/3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{\alpha x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{3(2-\alpha)}\,\mathrm{e}^{2x} & \text{se } \alpha \neq 2,\ \alpha \neq -4; \\[2ex] C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{3}\,x\,\mathrm{e}^{2x} & \text{se } \alpha = 2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che $\log \frac{1}{|\log^2(2x-2) - \log(2x-2)|} = -\log\left|\log^2(2x-2) - \log(2x-2)\right|$. Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, dobbiamo imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \left|\log^2(2x-2) - \log(2x-2)\right| \neq 0\,, \\[1ex] 2x-2 > 0\,, \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} \log(2x-2)(\log(2x-2)-1) \neq 0\,, \\[1ex] x > 1\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 3/2\,,\ x \neq \dfrac{\mathrm{e}+2}{2}\,, \\[1ex] x > 1\,. \end{cases}$$

Quindi, $E = \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \frac{\mathrm{e}+2}{2}\right) \cup \left(\frac{\mathrm{e}+2}{2}, +\infty\right)$. Inoltre

$$\begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty & \Longrightarrow & x = 1 \text{ è asintoto verticale;} \\ \lim\limits_{x\to \frac{3}{2}^\pm} f(x) = +\infty & \Longrightarrow & x = 3/2 \text{ è asintoto verticale;} \\ \lim\limits_{x\to \frac{\mathrm{e}+2}{2}^\pm} f(x) = +\infty & \Longrightarrow & x = \frac{\mathrm{e}+2}{2} \text{ è asintoto verticale;} \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\log(\log^2 x) = -\infty & \Longrightarrow & \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo.} \end{array}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n\log n}}$, da cui si ricava $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{\log n}{n}$, che è il termine generale di una serie divergente.

L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n^2}$, da cui si ricava $\frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{n^2}$, che è il termine generale di una serie convergente.

L'affermazione (C) è corretta, poiché per ipotesi $|(-1)^n a_n b_n| = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = o(1)\frac{1}{n^{3/2}} \leq C\frac{1}{n^{3/2}}$ e la serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

L'affermazione (D) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{1}{n}$, da cui si ricava $\sqrt{a_n}\,b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie convergente.

TEMA D

Esercizio 1

Innanzitutto osserviamo che il limite proposto può essere riscritto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n+1}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\log\left[1+\sinh\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right]}\,.$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1-t)$ e per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = \frac{1}{n+1}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{n+1}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right) &= \frac{1}{n+1}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim -\frac{1}{2n^2}\,.\end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che, per $\alpha > -1$,

$$\log\left[1+\sinh\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right]\sim \sinh\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sim\frac{1}{n^{\alpha+1}}\,,$$

ricaviamo

$$\frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n+1}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\log\left[1+\sinh\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right]\sim\frac{1}{-\frac{1}{2n^2}}\log\left[1+\sinh\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right]$$

$$\sim\begin{cases} -2n^2\log\left[1+\sinh 1\right]\to-\infty & \text{se } \alpha=-1;\\ -2n^2\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sim-\frac{2}{n^{\alpha-1}}\to\begin{cases}-\infty & \text{se } -1<\alpha<1;\\ -2 & \text{se } \alpha=1;\\ 0 & \text{se } \alpha>1.\end{cases}\end{cases}$$

Quindi, per il limite proposto avremo

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\sinh\left(\frac{1}{n+1}\right)+\log\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}\log\left[1+\sinh\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right]}=\begin{cases}0 & \text{se } -1\le\alpha<1;\\ 1/\mathrm{e}^2 & \text{se } \alpha=1;\\ 1 & \text{se } \alpha>1.\end{cases}$$

Esercizio 2

Ponendo $z = a + ib$ possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$ia-b+\sqrt{a^2+b^2}=i\sqrt{a^2+b^2}+ia^2-ib^2\,,$$

da cui ricaviamo il sistema

$$\begin{cases}-b+\sqrt{a^2+b^2}=0\,,\\ a=\sqrt{a^2+b^2}+a^2-b^2\,,\end{cases}\implies\begin{cases}b\ge0\,,\\ \sqrt{a^2+b^2}=b\,,\\ (a-b)(1-a-b)=0\,,\end{cases}$$

$$\implies\begin{cases}b\ge0\,,\\ a=b\\ \sqrt{2}b=b\,,\end{cases}\text{ che fornisce } a=b=0;\text{ oppure }\begin{cases}b\ge0\,,\\ a=-b+1\\ 2b^2-2b+1=b^2\,,\end{cases}\text{ che fornisce } a=0 \text{ e } b=1.$$

Quindi, l'equazione proposta ha come soluzioni $z = 0$ e $z = i$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 1; -4$, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$. Dal metodo di somiglianza otteniamo che, per $\alpha \neq \pm 2$, una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A e^{-\alpha^2 x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$A\alpha^4 e^{-\alpha^2 x} - 3A\alpha^2 e^{-\alpha^2 x} - 4A e^{-\alpha^2 x} = -2e^{-\alpha^2 x} \quad \Longrightarrow \quad A(\alpha^4 - 3\alpha^2 - 4) = -2\,,$$

da cui $A = -2/(\alpha^4 - 3\alpha^2 - 4)$. Se, invece, $\alpha = \pm 2$, sempre utilizzando il metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Axe^{-4x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$-8Ae^{-4x} + 16Axe^{-4x} + 3Ae^{-4x} - 12Axe^{-4x} - 4Axe^{-4x} = -2e^{-4x} \quad \Longrightarrow \quad -5A = -2\,,$$

da cui $A = 2/5$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{2}{\alpha^4 - 3\alpha^2 - 4}\, e^{-\alpha^2 x} & \text{se } \alpha \neq \pm 2; \\ C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \frac{2}{5}\, x\, e^{-4x} & \text{se } \alpha = \pm 2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Per determinare il campo di esistenza E della funzione proposta, dobbiamo imporre le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \left|\log^2(3x-1) - 2\log(3x-1)\right| \neq 0\,, \\ 3x - 1 > 0\,, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \log(3x-1)(\log(3x-1) - 2) \neq 0\,, \\ x > 1/3\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \dfrac{2}{3}\,,\ x \neq \dfrac{e^2+1}{3}\,, \\ x > 1/3\,. \end{cases}$$

Quindi, $E = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{e^2+1}{3}\right) \cup \left(\frac{e^2+1}{3}, +\infty\right)$. Inoltre

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f(x) = +\infty && \Longrightarrow \quad x = 1/3 \text{ è asintoto verticale;} \\ &\lim_{x \to \frac{2}{3}^\pm} f(x) = -\infty && \Longrightarrow \quad x = \tfrac{2}{3} \text{ è asintoto verticale;} \\ &\lim_{x \to \frac{e^2+1}{3}^\pm} f(x) = -\infty && \Longrightarrow \quad x = \tfrac{e^2+1}{3} \text{ è asintoto verticale;} \\ &\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log(\log^2 x) = +\infty && \Longrightarrow \quad \text{non c'è asintoto orizzontale né obliquo.} \end{aligned}$$

Esercizio 5

L'affermazione (A) è corretta, poiché per ipotesi $a_n b_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = o(1)\frac{1}{n^{3/2}} \leq C\frac{1}{n^{3/2}}$ e la serie armonica generalizzata di termine $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

L'affermazione (B) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, da cui si ricava $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{n \log n}$, che è il termine generale di una serie divergente.

L'affermazione (C) è falsa, basta considerare $a_n = \frac{1}{n \log n}$ e $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, da cui si ricava $\left|(-1)^n \frac{a_n^2}{b_n^2}\right| = \frac{1}{n \log^2 n}$, che è il termine generale di una serie convergente.

L'affermazione (D) è corretta, poiché per ipotesi $\frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{o\left(\frac{1}{n}\right)} \to +\infty$, quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.