

**SOLUZIONI COMPITO del 8/01/2013**  
**ANALISI MATEMATICA II - 5 CFU**  
**ENERGETICA**

**TEMA**

**Esercizio 1**

Effettuando una sostituzione in coordinate polari centrate in  $(0, 1)$ , si ricava

$$\iint_D x \sin(x^2 + y^2 - 2y + 1)^{3/2} dx dy = \iint_{\tilde{E}} r \cos \theta \sin[(r^2)^{3/2}] r dr d\theta = \iint_{\tilde{E}} r^2 \sin(r^3) \cos \theta dr d\theta,$$

dove  $\tilde{E} = \{(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi) : 0 \leq r \leq \pi^{1/3}, \theta \in [-\pi/4, \pi/4]\}$ . Utilizzando la formula di integrazione per riduzione si ottiene

$$\iint_{\tilde{E}} r^2 \sin(r^3) \cos \theta dr d\theta = \left( \int_0^{\pi^{1/3}} r^2 \sin(r^3) dr \right) \left( \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \theta d\theta \right) = \left( -\frac{\cos r^3}{3} \Big|_0^{\pi^{1/3}} \right) \left( \sin \theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

**Esercizio 2**

Innanzitutto osserviamo che il termine generale della serie proposta è non negativo e può essere riscritto nella forma

$$a_n := e^{\frac{1}{\log(1 + \frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n})} \log \left[ 1 + \sin \frac{1}{(n+2)^2} \right]}.$$

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione  $t \mapsto \log(1+t)$  e per la funzione  $t \mapsto \sin t$ , con  $t = \frac{1}{n}$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \sin \left( \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2} + o \left( \frac{1}{n^2} \right) \sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Inoltre, ricordando che

$$\log \left[ 1 + \sin \frac{1}{(n+2)^2} \right] \sim \sin \frac{1}{(n+2)^2} \sim \frac{1}{(n+2)^2} \sim \frac{1}{n^2},$$

ricaviamo

$$\frac{1}{\log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \sin \left( \frac{1}{n} \right)} \log \left[ 1 + \sin \frac{1}{(n+2)^2} \right] \sim -2n^2 \frac{1}{n^2} \rightarrow -2.$$

Da ciò otteniamo che  $a_n \rightarrow 1/e^2 \neq 0$ ; pertanto, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, la serie proposta diverge.

**Esercizio 3**

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ . Essa ha come soluzioni  $\lambda = 1; -2$ , pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà  $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ . Dal metodo di somiglianza otteniamo che, per  $\alpha \neq \pm 1$ , una soluzione particolare  $y_p(x)$  sarà della forma  $y_p(x) = A e^{\alpha^2 x}$ . Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$A\alpha^4 e^{\alpha^2 x} + A\alpha^2 e^{\alpha^2 x} - 2Ae^{\alpha^2 x} = 2e^{\alpha^2 x} \implies A(\alpha^4 + \alpha^2 - 2) = 2,$$

da cui  $A = 2/(\alpha^4 + \alpha^2 - 2)$ . Se, invece,  $\alpha = \pm 1$ , sempre utilizzando il metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare  $y_p(x)$  sarà della forma  $y_p(x) = Axe^x$ . Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$2Ae^x + Axe^x + Ae^x + Axe^x - 2Axe^x = 2e^x \implies 3A = 2,$$

da cui  $A = 2/3$ . Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{\alpha^4 + \alpha^2 - 2} e^{\alpha^2 x} & \text{se } \alpha \neq \pm 1; \\ C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{2}{3} x e^x & \text{se } \alpha = \pm 1. \end{cases}$$

#### Esercizio 4

Osserviamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2y(x+1) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x+1)^2 - 4 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ \text{impossibile}; \\ y = 0, \\ (x+1)^2 = 4; \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1, x = -3, \\ y = 0. \end{cases}$$

Quindi gli unici punti stazionari sono  $(1, 0)$  e  $(-3, 0)$ . La matrice Hessiana è data da

$$H_f = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2 \\ 2x+2 & 0 \end{pmatrix}$$

e nei punti stazionari si ha

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{che è indefinita}$$

$$H_f(-3, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{che è indefinita.}$$

Quindi  $(1, 0)$  e  $(-3, 0)$  sono entrambi punti di sella ed  $f$  non ha estremanti relativi né assoluti. Poiché, ad esempio,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 - 4 = +\infty$  e  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(-1, y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} -4y = -\infty$ , la funzione è illimitata.

#### Esercizio 5

L'affermazione (A) è corretta, poiché per ipotesi  $a_n b_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = o(1) \frac{1}{n^{3/2}} \leq C \frac{1}{n^{3/2}}$  e la serie armonica generalizzata di termine  $\frac{1}{n^{3/2}}$  converge.

L'affermazione (B) è falsa, basta considerare  $a_n = \frac{1}{n\sqrt{\log n}}$  e  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , da cui si ricava  $\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{n \log n}$ , che è il termine generale di una serie divergente.

L'affermazione (C) è falsa, basta considerare  $a_n = \frac{1}{n \log n}$  e  $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , da cui si ricava  $\left|(-1)^n \frac{a_n^2}{b_n^2}\right| = \frac{1}{n \log^2 n}$ , che è il termine generale di una serie convergente.

L'affermazione (D) è corretta, poiché per ipotesi  $\frac{b_n^2}{a_n^2} = \frac{1}{o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow +\infty$ , quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza.