SOLUZIONI COMPITO del 5/06/2014
ANALISI MATEMATICA I - 10 CFU
ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno arbitrario (in funzione del parametro reale x), pertanto cominciamo a considerarne il modulo. Osserviamo anche che $\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \le 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, come risulta dalla risoluzione di questa semplice disequazione. Pertanto, per $x \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\left|\frac{1}{n\log^2(n+1)}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^n\right| \le \frac{1}{n\log^2(n+1)} \sim \frac{1}{n\log^2 n}\,.$$

Ricordando che quest'ultimo è il termine generale di una serie di Abel convergente (in quanto $p = 1$ e $q = 2$), dal criterio del confronto e del confronto asintotico, si ricava che la serie è assollutamente e semplicemente convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2
Utilizzando il metodo di riduzione degli integrali doppi, l'integrale proposto si può riscrivere come segue

$$\begin{aligned}\iint_D y\,\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx\,dy &= \int_1^2 y\left(\int_0^{y^4-1}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx\right)dy = \int_1^2 y\left(2\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\Big|_0^{y^4-1}\right)dy\\ &= \int_1^2 2y\left(\mathrm{e}^{y^2}-\mathrm{e}\right)dy = \mathrm{e}^{y^2}-\mathrm{e}\,y^2\Big|_1^2 = \mathrm{e}^4-4\mathrm{e}-\mathrm{e}+\mathrm{e} = \mathrm{e}^4-4\mathrm{e}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3
Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^2(x)+1}{y(x)}\,\frac{1}{x^2+4}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2}\log(y^2+1) = \int\frac{y}{y^2+1}\,dy = \int\frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{(x/2)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $C = \frac{1}{2}\log 3$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \sqrt{3\exp\left(\arctan\frac{x}{2}\right)-1}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo, innanzitutto, che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/2^-} f(x) &= \lim_{x\to 1/2^-}\frac{\sin^2(2\log 2x)}{2x-1} = \lim_{x\to 1/2^-}\frac{(2\log 2x)^2}{2x-1} = \lim_{x\to 1/2^-}\frac{4\log^2[2(x-1/2)+1]}{2x-1}\\ &= \lim_{x\to 1/2^-}\frac{4[2(x-1/2)]^2}{2(x-1/2)} = \lim_{x\to 1/2^-} 8(x-1/2) = 0 = f(1/2) = \lim_{x\to 1/2^+} f(x)\,.\end{aligned}$$

Pertanto, la funzione è continua nel punto $x_0 = 1/2$. Per quanto riguarda la derivabilità, tenendo conto che $f'(x) = 3\sqrt{(2x-1)}$ per $x > 1/2$, calcolando il limite da destra della derivata e il limite da sinistra del rapporto incrementale otteniamo

$$\lim_{x\to 1/2^+} f'(x) = \lim_{x\to 1/2^+} 3\sqrt{(2x-1)} = 0\,;$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1/2+h)-f(1/2)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{\sin^2[2\log 2(1/2+h)]}{2(1/2+h)-1}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{[2\log(1+2h)]^2}{2h^2} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(4h)^2}{2h^2} = 8\,.$$

Pertanto, la funzione non è derivabile in $x = 1/2$, che risulta essere un punto angoloso.

Esercizio 5

L'affermazione A) è falsa, basta considerare la funzione $f(x) = \frac{1}{x^2}$, che fornisce il termine generale $n^2 \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = n \not\to 0$, quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie.
L'affermazione B) è vera, in quanto, per ipotesi, $nf^2(\sqrt{n}) \sim n\frac{1}{(\sqrt{n})^4} = \frac{1}{n}$, che è il termine generale della serie armonica. Poiché la serie armonica diverge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta diverge.
L'affermazione C) è vera, in quanto, per ipotesi, $\sqrt{n}f^2(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}\frac{1}{(\sqrt{n})^4} = \frac{1}{n^{3/2}}$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata di esponente $3/2 > 1$. Poiché tale serie converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie proposta converge.