SOLUZIONI COMPITO dell'8/09/2014
ANALISI MATEMATICA - 10 CFU
ENERGETICA

Esercizio 1
Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini di segno non negativo; possiamo quindi procedere utilizzando, ad esempio, il criterio della radice. In tal caso otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{(1+2x^2)^n}{(2n+1)(n+2)}} \sim \frac{(1+2x^2)}{\sqrt[n]{2n\cdot n}} \to (1+2x^2)\,.$$

Pertanto, la serie risulterà essere convergente se $(1+2x^2)<1$, che è impossibile, e sarà, invece, divergente se $(1+2x^2)>1$, ovvero per $x\neq 0$. Infine, per $x=0$, il criterio non fornisce alcuna informazione, ma sostituendo nel termine generale della serie otteniamo $a_n = \frac{1}{(2n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{2n^2}$, che fornisce una serie convergente, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2>1$.
In conclusione, la serie proposta convergerà se e solo se $x=0$, mentre divergerà per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Esercizio 2
Utilizzando il teorema di riduzione degli integrali doppi otteniamo

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,\cos(y^2)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2} x\left(\int_0^{\sqrt{x}} y\,\cos(y^2)\,dy\right)dx = \int_0^{\pi/2}\frac{x}{2}\left[\sin(y^2)\Big|_0^{\sqrt{x}}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \frac{1}{2}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right) = \frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3
Poiché l'arcotangente è una funzione definita su tutto l'asse reale, l'unica condizione da imporre affinché f sia ben definita è che il denominatore non si annulli, ovvero $x\neq 0;1$. Quindi $C.E. = (-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pi/2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pi/2}{x^2} = 0\\ &\Longrightarrow \qquad y=0 \text{ è asintoto orizzontale per } x\to\pm\infty;\\ &\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} -\frac{2x(x+3)}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} -\frac{6x}{x} = -6\\ &\Longrightarrow \qquad \text{quindi } x=0 \text{ è un punto in cui } f \text{ è prolungabile con continuità};\\ &\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm}\frac{\arctan 8}{x-1} = \pm\infty\\ &\Longrightarrow \qquad x=1 \text{ è asintoto verticale per } x\to 1^\pm.\end{aligned}$$

Osserviamo che nel secondo limite abbiamo utilizzato il fatto che $\arctan y\sim y$, per $y\to 0$, con $y=2x(x+3)$.

Esercizio 4
Osserviamo, innanzitutto, che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+2=0$, che ha come soluzioni $\lambda=\pm\sqrt{2}i$; pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x)+C_2\sin(\sqrt{2}x)$. Utilizzando, inoltre, il metodo di somiglianza, si ricava subito che una soluzione particolare è $y_p(x)=1/2$, pertanto l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x)+1/2$. Imponendo, ora, le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{aligned}y(0) &= C_1 + 1/2 = 1/2 &&\Longrightarrow && C_1 = 0\,,\\ y'(0) &= \sqrt{2}C_2 = 0 &&\Longrightarrow && C_2 = 0\,.\end{aligned}$$

Quindi, la soluzione cercata sarà $y(x)=1/2$, cioè coincide con la soluzione particolare.

Esercizio 5

Osserviamo che l'unica affermazione corretta è la D), in quanto applicando il criterio della radice otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(a_n b_n)^n} = \lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = 0 < 1 \,,$$

dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato l'ipotesi che le due successioni sono infinitesime. Invece le altre affermazioni sono false, poiché prendendo, ad esempio, $a_n = b_n = 1/\sqrt{\log n}$ si ottiene che la A) è falsa in quanto

$$\sum_n a_n b_n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}} = \sum_n \frac{1}{\log n} = +\infty$$

e la C) è falsa in quanto

$$\sum_n \left(\frac{a_n b_n}{n}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}}\right) = \sum_n \left(\frac{1}{n\log n}\right) = +\infty \,.$$

Infine, la B) è falsa, in quanto prendendo $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 2$ e $a_n = b_n = 0$, per $n \geq 3$, si ricava

$$\sum_n a_n b_n = 1 + 4 = 5 \neq (\sum_n a_n)(\sum_n b_n) = 3\cdot 3 = 9 \,.$$