**SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 31/03/2014**
**ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU**
**MECCANICA - ENERGETICA**

**Esercizio 1**
Poiché la funzione proposta è di classe $\mathcal{C}^\infty([0,\pi/3])$, per studiarne la monotonia e gli estremanti relativi procediamo calcolandone la derivata prima. Otteniamo in tal modo

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(1+\tan^2 x) - 2\tan x(1+\tan^2 x) = 2(1+\tan^2 x)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan x\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } \tan x < 1/\sqrt{3} \iff 0 \le x < \pi/6, \\ f'(x) < 0 & \text{se } \tan x > 1/\sqrt{3} \iff \pi/6 < x \le \pi/3, \\ f'(x) = 0 & \text{se } \tan x = 1/\sqrt{3} \iff x = \pi/6. \end{cases}$$

Pertanto, $x_{1,2} = 0; \pi/3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x_3 = \pi/6$ è l'unico punto di massimo relativo. Poiché la funzione proposta è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0,\pi/3]$, per il Teorema di Weierstrass, essa assume anche massimo e minimo assoluto; pertanto, $x_3 = \pi/6$ è il punto di massimo assoluto, mentre, valutando $f(x_1) = 0$ ed $f(x_2) = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan(\pi/3) - \tan^2(\pi/3) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = -1$, ricaviamo che $x_2 = \pi/3$ è il punto di minimo assoluto.

**Esercizio 2**
Innanzitutto, osserviamo che $\log(1+x^2+|x|) \ge 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi si tratta di una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice e ricordando che $\sqrt[n]{n^{3/2}} = (\sqrt[n]{n})^{3/2} \to 1$, otteniamo

$$\sqrt[n]{\frac{[\log(1+x^2+|x|)]^n}{n^{3/2}}} \sim \sqrt[n]{[\log(1+x^2+|x|)]^n} = \log(1+x^2+|x|)\,.$$

Pertanto, per $\log(1+x^2+|x|) < 1$ la serie converge, per $\log(1+x^2+|x|) > 1$ la serie diverge, mentre per $\log(1+x^2+|x|) = 1$, il termine generale si riduce a $1/(n^{3/2})$, che fornisce una serie convergente.
Risolvendo, infine, rispetto ad $x$, otteniamo $\log(1+x^2+|x|) \le 1$ se e solo se $1+x^2+|x| \le \mathrm{e}$; quindi risolvendo l'equazione associata e tenendo conto che $x^2 = |x|^2$, otteniamo

$$|x|^2 + |x| - (\mathrm{e}-1) = 0 \qquad \iff \qquad |x| = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\mathrm{e}-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}\,.$$

Poiché $|x| \ge 0$, ricaviamo

$$|x| \le \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2} \qquad \iff \qquad \frac{1-\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}\,.$$

Pertanto, la serie risulterà convergente per $\frac{1-\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}$, mentre sarà divergente per $x < \frac{1-\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}$ e $x > \frac{-1+\sqrt{4\mathrm{e}-3}}{2}$.

**Esercizio 3**
Innanzitutto, osserviamo che nell'intervallo di integrazione $x \ge 0$, quindi possiamo riscrivere l'integrale proposto nella forma

$$\int_0^{\mathrm{e}^{\pi/2}-1} \frac{\sin[\log(1+x^2+2x)]}{1+x}\,dx = \int_0^{\mathrm{e}^{\pi/2}-1} \frac{\sin[\log(1+x)^2]}{1+x}\,dx = \int_0^{\mathrm{e}^{\pi/2}-1} \frac{\sin[2\log(1+x)]}{1+x}\,dx\,.$$

Effettuando, quindi, la sostituzione di variabile $t = \log(1+x)$, da cui $dt = \frac{1}{1+x}\,dx$, $t(0) = \log 1 = 0$ e $t(\mathrm{e}^{\pi/2}-1) = \log(1+\mathrm{e}^{\pi/2}-1) = \log(\mathrm{e}^{\pi/2}) = \pi/2$, otteniamo

$$\int_0^{\mathrm{e}^{\pi/2}-1} \frac{\sin[2\log(1+x)]}{1+x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,dt = -\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

**Esercizio 4**

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\alpha\lambda = 0$, cha ha per soluzioni $\lambda = 0; 2\alpha$. Pertanto, per $\alpha \neq 0$, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{2\alpha x}$. Inoltre, per il metodo di somiglianza, la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{se } \alpha \neq 1; \\ y_p(x) &= Ax\mathrm{e}^{2x} \qquad \text{se } \alpha = 1. \end{aligned}$$

Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, otteniamo, nel primo caso,

$$4A\mathrm{e}^{2x} - 4\alpha A\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{2(1-\alpha)}\,,$$

mentre nel secondo caso

$$4A\mathrm{e}^{2x} + 4Ax\mathrm{e}^{2x} - 2A\mathrm{e}^{2x} - 4Ax\mathrm{e}^{2x} = 2\mathrm{e}^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Infine, per $\alpha = 0$ l'equazione si riduce a $y''(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y'(x) = \mathrm{e}^{2x} + C_1$ e $y(x) = \mathrm{e}^{2x}/2 + C_1 x + C_2$. Pertanto, per $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione dell'equazione completa sarà

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + C_1 x + C_2 && \text{se } \alpha = 0, \\ y(x) &= C_1 + C_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} && \text{se } \alpha = 1, \\ y(x) &= C_1 + C_2\mathrm{e}^{2\alpha x} + \frac{1}{2(1-\alpha)}\,\mathrm{e}^{2x} && \text{se } \alpha \neq 0; 1. \end{aligned}$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, ricaviamo

$$\begin{cases} 1/2 + C_2 = 0\,, \\ 1 + C_1 = 0\,, \end{cases} \text{se } \alpha = 0; \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ 2C_2 + 1 = 0\,, \end{cases} \text{se } \alpha = 1; \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{2(1-\alpha)} = 0\,, \\ 2\alpha C_2 + \dfrac{1}{(1-\alpha)} = 0\,, \end{cases} \text{se } \alpha \neq 0; 1.$$

Da ciò ricaviamo

$$\begin{cases} C_1 = -1\,, \\ C_2 = -1/2\,, \end{cases} \text{se } \alpha = 0; \quad \begin{cases} C_1 = 1/2\,, \\ C_2 = -1/2\,, \end{cases} \text{se } \alpha = 1; \quad \begin{cases} C_1 = 0\,, \\ C_2 = -\dfrac{1}{2\alpha(1-\alpha)}\,, \end{cases} \text{se } \alpha \neq 0; 1.$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\varepsilon^{2x}}{2} - x - 1/2 && \text{se } \alpha = 0, \\ y(x) &= 1/2 - \mathrm{e}^{2x}/2 + x\mathrm{e}^{2x} && \text{se } \alpha = 1, \\ y(x) &= -\frac{1}{2\alpha(1-\alpha)}\mathrm{e}^{2\alpha x} + \frac{1}{2(1-\alpha)}\,\mathrm{e}^{2x} && \text{se } \alpha \neq 0; 1. \end{aligned}$$

**Esercizio 5**

Prendendo, ad esempio, $a_n = \frac{1}{n \log^2 n} > 0$, per $n \geq 4$, si ricava subito che

$$na_n = \frac{n}{n\log^2 n} = \frac{1}{\log^2 n} \to 0\,, \qquad n^2 a_n = \frac{n^2}{n \log^2 n} = \frac{n}{\log^2 n} \to +\infty\,,$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} a_n = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \text{ che converge,} \qquad \sum_{n=4}^{+\infty} (\log n) a_n = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\log n}{n \log^2 n} = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} \text{ che diverge.}$$