SOLUZIONI COMPITO del 11/01/2016
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(8z^3-1)=0$, da cui si ricava $z=0$ e $z^3=1/8$, pertanto

$$z=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{i0}}=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i0/3}=\frac{1}{2}\,,\\[2ex] \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i(0+2\pi)/3}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i2\pi/3}=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\,i\,,\\[2ex] \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i(0+4\pi)/3}=\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i4\pi/3}=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\,i\,.\end{cases}$$

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$, con $x=2\sin(1/n)$, e per la funzione $x\mapsto\sin x$, con $x=1/n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{2\sin(1/n)}=&1+\big(2\sin(1/n)\big)+\frac{1}{2}\big(2\sin(1/n)\big)^2+\frac{1}{3!}\big(2\sin(1/n)\big)^3+o(1/n^3)\\ =&1+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+o(1/n^3)\right)+\frac{4}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+o(1/n^3)\right)^2+\frac{8}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+o(1/n^3)\right)^3\\ =&1+\frac{2}{n}-\frac{1}{3n^3}+\frac{2}{n^2}+\frac{4}{3n^3}+o(1/n^3)=1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(1/n^3)\,.\end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$a_n:=\frac{\mathrm{e}^{2\sin(1/n)}-1-(2/n)-(2/n^2)}{2/n^3}=\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}+o(1/n^3)-1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^3}}\sim\frac{n^3}{2n^3}\to\frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x)=-2\mathrm{e}^{2x}[y^2(x)+1]$, risulta essere a variabili separabili e priva di integrali singolari. Separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\arctan[y(x)]=\int\frac{dy}{y^2+1}=-\int 2\mathrm{e}^{2x}\,dx=-\mathrm{e}^{2x}+C\qquad\Longrightarrow\qquad y(x)=\tan[-\mathrm{e}^{2x}+C]\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $-1=y(\log\sqrt{\pi/4})=\tan[-\mathrm{e}^{2\log\sqrt{\pi/4}}+C]=\tan(-\pi/4+C)$, che porta a $C=0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x)=\tan[-\mathrm{e}^{2x}]$, definita per $x<\log\sqrt{\pi/2}$.

Esercizio 4
Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x\to0^+$, dove abbiamo

$$f(x)\sim\frac{x}{\sqrt{x}\,x^{\alpha}}=\frac{1}{x^{\alpha-1/2}}\,.$$

Pertanto, utilizzando il criterio del confronto asintotico per gli integrali, otteniamo che f è impropriamente integrabile in un intorno dell'origine se e solo se $\alpha-1/2<1$, cioè per $\alpha<3/2$.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente decrescente, avremo che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ per $x < 0$, $f(x) < 0$ per $x > 0$ e, quindi, $xf(x) < 0$ per $x \neq 0$. Tenendo conto di quest'ultima osservazione e del teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = f^2(x)x \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 0, \\ = 0 & \text{se } x = 0, \\ > 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad F''(x) = 2f(x)f'(x)x + f^2(x) \geq 0\,.$$

Quindi $x_0 = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto stretto ed F è sempre convessa. Infine, il valore di minimo sarà dato da

$$F(0) = \int_1^0 f^2(t)t\,dt = -\int_0^1 f^2(t)t\,dt < 0\,,$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo tenuto conto che $f^2(t)t > 0$ per $t \in (0, 1]$.

TEMA B

Esercizio 1
Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(27z^3 - i) = 0$, da cui si ricava $z = 0$ e $z^3 = i/27$, pertanto

$$z = \sqrt[3]{\frac{i}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}\,\mathrm{e}^{i\pi/2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{1}{6}\,i\,, \\[2ex] \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{i(\pi/2+2\pi)/3} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{i5\pi/6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{6} + \dfrac{1}{6}\,i\,, \\[2ex] \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{i(\pi/2+4\pi)/3} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -\dfrac{i}{3}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 4(\mathrm{e}^{1/n} - 1)$, e per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, con $x = 1/n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sin[4(\mathrm{e}^{1/n} - 1)] =& \big(4(\mathrm{e}^{1/n} - 1)\big) - \frac{1}{3!}\big(4(\mathrm{e}^{1/n} - 1)\big)^3 + o(1/n^3) \\ =& 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + o(1/n^3)\right) - \frac{64}{6}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + o(1/n^3)\right)^3 \\ =& \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{3n^3} - \frac{32}{3n^3} + o(1/n^3) = \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{10}{n^3} + o(1/n^3)\,.\end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$a_n := \frac{\sin[4(\mathrm{e}^{(1/n)} - 1)] - (4/n) - (2/n^2)}{4/n^3} = \frac{\frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{10}{n^3} + o(1/n^3) - \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}}{\frac{4}{n^3}} \sim -\frac{10n^3}{4n^3} \to -5/2\,.$$

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{2}{x^3}[y^2(x) + 1]$, risulta essere a variabili separabili e priva di integrali singolari. Separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\arctan[y(x)] = \int \frac{dy}{y^2+1} = -\int \frac{2}{x^3}\,dx = \frac{1}{x^2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \tan\left(\frac{1}{x^2} + C\right)\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $\sqrt{3} = y(\sqrt{3/\pi}) = \tan(\pi/3 + C)$, che porta a $C = 0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = \tan(1/x^2)$, definita per $x > \sqrt{2/\pi}$.

Esercizio 4
Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0, 1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$, dove abbiamo

$$f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - 5/6}}\,.$$

Pertanto, utilizzando il criterio del confronto asintotico per gli integrali, otteniamo che f è impropriamente integrabile in un intorno dell'origine se e solo se $\alpha - 5/6 < 1$, cioè per $\alpha < 11/6$.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente decrescente, avremo che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ per $x < 0$, $f(x) < 0$ per $x > 0$ e, quindi, $xf^3(x) < 0$ per $x \neq 0$. Tenendo conto di quest'ultima osservazione e del teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = f^3(x)x^2 \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0, \\ = 0 & \text{se } x = 0, \\ < 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad F''(x) = 3f^2(x)f'(x)x^2 + 2f^3(x)x \leq 0\,.$$

Quindi $x_0 = 0$ è l'unico punto di massimo assoluto stretto ed F è sempre concava. Infine, il valore di massimo sarà dato da

$$F(0) = \int_1^0 f^3(t)t^2\,dt = -\int_0^1 f^3(t)t^2\,dt > 0\,,$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo tenuto conto che $f^3(t)t^2 < 0$ per $t \in (0, 1]$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(z^3 + 27i) = 0$, da cui si ricava $z = 0$ e $z^3 = -27i$, pertanto

$$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27\,\mathrm{e}^{i3\pi/2}} = \begin{cases} 3\,\mathrm{e}^{i\pi/2} = 3i\,, \\ \\ 3\,\mathrm{e}^{i(3\pi/2+2\pi)/3} = 3\,\mathrm{e}^{i7\pi/6} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,i\,, \\ \\ 3\,\mathrm{e}^{i(3\pi/2+4\pi)/3} = 3\,\mathrm{e}^{i11\pi/6} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}\,i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 2(\mathrm{e}^{1/n} - 1)$, e per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, con $x = 1/n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sin[2(\mathrm{e}^{1/n} - 1)] =& \big(2(\mathrm{e}^{1/n} - 1)\big) - \frac{1}{3!}\big(2(\mathrm{e}^{1/n} - 1)\big)^3 + o(1/n^3) \\ =& 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + o(1/n^3)\right) - \frac{8}{6}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3!n^3} + o(1/n^3)\right)^3 \\ =& \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{4}{3n^3} + o(1/n^3) = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o(1/n^3)\,. \end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$a_n := \frac{5/n^3}{\sin[2(\mathrm{e}^{(1/n)} - 1)] - (2/n) - (1/n^2)} = \frac{\frac{5}{n^3}}{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o(1/n^3) - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \sim -\frac{5n^3}{n^3} \to -5\,.$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x) = \frac{1}{x^2}[y^2(x) + 1]$, risulta essere a variabili separabili e priva di integrali singolari. Separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\arctan[y(x)] = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \tan\left(-\frac{1}{x} + C\right)\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $-\sqrt{3} = y(3/\pi) = \tan(-\pi/3 + C)$, che porta a $C = 0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = \tan(-1/x)$, definita per $x > 2/\pi$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0, 1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$, dove abbiamo

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha \sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{x^{2/3-\alpha}}\,.$$

Pertanto, utilizzando il criterio del confronto asintotico per gli integrali, otteniamo che f è impropriamente integrabile in un intorno dell'origine se e solo se $2/3 - \alpha < 1$, cioè per $\alpha > -1/3$.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente decrescente, avremo che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ per $x < 0$, $f(x) < 0$ per $x > 0$ e, quindi, $xf^3(x) < 0$ per $x \neq 0$. Tenendo conto di quest'ultima osservazione e del teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = f^3(x)x^2 \begin{cases} > 0 & \text{se } x < 0, \\ = 0 & \text{se } x = 0, \\ < 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad F''(x) = 3f^2(x)f'(x)x^2 + 2f^3(x)x \leq 0\,.$$

Quindi $x_0 = 0$ è l'unico punto di massimo assoluto stretto ed F è sempre concava. Infine, il valore di massimo sarà dato da

$$F(0) = \int_1^0 f^3(t)t^2\,dt = -\int_0^1 f^3(t)t^2\,dt > 0\,,$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo tenuto conto che $f^3(t)t^2 < 0$ per $t \in (0, 1]$.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z(z^3+8)=0$, da cui si ricava $z=0$ e $z^3=-8$, pertanto

$$z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8\,\mathrm{e}^{i\pi}}=\begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{i\pi/3}=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=1+i\sqrt{3}\,, \\[2ex] 2\,\mathrm{e}^{i(\pi+2\pi)/3}=2\,\mathrm{e}^{i\pi}=-2\,, \\[2ex] 2\,\mathrm{e}^{i(\pi+4\pi)/3}=2\,\mathrm{e}^{i5\pi/3}=1-i\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$, con $x=3\sin(1/n)$, e per la funzione $x\mapsto \sin x$, con $x=1/n$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{3\sin(1/n)} =&1+\big(3\sin(1/n)\big)+\frac{1}{2}\big(3\sin(1/n)\big)^2+\frac{1}{3!}\big(3\sin(1/n)\big)^3+o(1/n^3)\\
=&1+3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+o(1/n^3)\right)+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+o(1/n^3)\right)^2+\frac{27}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^3}+o(1/n^3)\right)^3\\
=&1+\frac{3}{n}-\frac{1}{2n^3}+\frac{9}{2n^2}+\frac{9}{2n^3}+o(1/n^3)=1+\frac{3}{n}+\frac{9}{2n^2}+\frac{4}{n^3}+o(1/n^3)\,.
\end{aligned}$$

Pertanto otteniamo

$$a_n:=\frac{8/n^3}{\mathrm{e}^{3\sin(1/n)}-1-(3/n)-(9/2n^2)}=\frac{\frac{8}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{9}{2n^2}+\frac{4}{n^3}+o(1/n^3)-1-\frac{3}{n}-\frac{9}{2n^2}}\sim\frac{8n^3}{4n^3}\to 2\,.$$

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che, riscritta nella forma $y'(x)=3\mathrm{e}^{3x}[y^2(x)+1]$, risulta essere a variabili separabili e priva di integrali singolari. Separando le variabili e integrando, otteniamo

$$\arctan[y(x)]=\int\frac{dy}{y^2+1}=\int 3\mathrm{e}^{3x}\,dx=\mathrm{e}^{3x}+C \qquad\Longrightarrow\qquad y(x)=\tan[\mathrm{e}^{3x}+C]\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $1=y(\log\sqrt[3]{\pi/4})=\tan[\mathrm{e}^{3\log\sqrt[3]{\pi/4}}+C]=\tan(\pi/4+C)$, che porta a $C=0$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x)=\tan[\mathrm{e}^{3x}]$, definita per $x<\log\sqrt[3]{\pi/2}$.

Esercizio 4

Poiché la funzione integranda è definita, non negativa e continua in $(0,1]$, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito è sufficiente studiare il comportamento di f per $x\to 0^+$, dove abbiamo

$$f(x)\sim\frac{x^\alpha}{\sqrt[4]{x}\,x^2}=\frac{1}{x^{9/4-\alpha}}\,.$$

Pertanto, utilizzando il criterio del confronto asintotico per gli integrali, otteniamo che f è impropriamente integrabile in un intorno dell'origine se e solo se $9/4-\alpha<1$, cioè per $\alpha>5/4$.

Esercizio 5

Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Inoltre, poiché $f(0) = 0$ ed f è strettamente decrescente, avremo che $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ per $x < 0$, $f(x) < 0$ per $x > 0$ e, quindi, $xf(x) < 0$ per $x \neq 0$. Tenendo conto di quest'ultima osservazione e del teorema di Torricelli si ricava

$$F'(x) = f^2(x)x \begin{cases} < 0 & \text{se } x < 0, \\ = 0 & \text{se } x = 0, \\ > 0 & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad F''(x) = 2f(x)f'(x)x + f^2(x) \geq 0\,.$$

Quindi $x_0 = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto stretto ed F è sempre convessa. Infine, il valore di minimo sarà dato da

$$F(0) = \int_1^0 f^2(t)t\,dt = -\int_0^1 f^2(t)t\,dt < 0\,,$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo tenuto conto che $f^2(t)t > 0$ per $t \in (0,1]$.