SOLUZIONI COMPITO del 6/07/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{3(x-2)} = -\sqrt[3]{6} = f(0)\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin[2\log(1+x^3)]}{\sqrt[3]{3x^{10}-x^9}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2\log(1+x^3)}{\sqrt[3]{-x^9}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{2x^3}{x^3} = -2 \neq f(0)\,;$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $t \to 0$, $\sin t \sim t$, con $t = 2\log(1+x^3) \to 0$ per $x \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = x^3 \to 0$ per $x \to 0$, e $3x^{10} - x^9 \sim -x^9$ per $x \to 0$. Pertanto, $x = 0$ è un punto di salto per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = 2$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{3}{3\sqrt[3]{[3(x-2)]^2}} \qquad \text{per } x > 0\,,\ x \neq 2\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{9}(x-2)^{2/3}} = +\infty\,,$$

e quindi $x = 2$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $[2\log(x^2+1)-1]$ ha segno variabile ed, in particolare, $[2\log(x^2+1)-1] > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{\sqrt{e}-1} \ \vee \ x > \sqrt{\sqrt{e}-1}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|2\log(x^2+1)-1|^n}{n^3+\sqrt[4]{n}+1}} = \left|2\log(x^2+1)-1\right| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{n^3+\sqrt[4]{n}+1} \to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell = \left|2\log(x^2+1)-1\right| < 1$, la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente. In particolare, la disequazione $\left|2\log(x^2+1)-1\right| < 1$ equivale a $-1 < 2\log(x^2+1) - 1 < 1$ ed ha per soluzione $-\sqrt{e-1} < x < 0 \ \vee \ 0 < x < \sqrt{e-1}$.
2. Se $\ell = \left|2\log(x^2+1)-1\right| > 1$, cioè $x < -\sqrt{e-1} \ \vee \ x > \sqrt{e-1}$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-mo non è infinitesimo, dunque la serie di partenza non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell = \left|2\log(x^2+1)-1\right| = 1$, cioè $x = \pm\sqrt{e-1}; 0$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x = \pm\sqrt{e-1}; 0$ nella serie dei moduli si ottiene $\sum \frac{1}{n^3+\sqrt[4]{n}+1}$, che risulta una serie di convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$. Pertanto la serie proposta converge assolutamente anche per $x = \pm\sqrt{e-1}; 0$.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = \frac{y^3(x)+3}{y^2(x)} \frac{1}{x^2+1}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che ha come soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv -\sqrt[3]{3}$, che non soddisfa la condizione richiesta. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{3}\log|y^3(x)+3| = \int \frac{y^2}{y^3+3}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C\,,$$

da cui,

$$y(x) = \sqrt[3]{-3 + K \exp(3 \arctan x)}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del segno di $y^3(x)+3$ nella costante $K \in \mathbb{R}$ (osserviamo che per $K = 0$ si riottiene anche la soluzione singolare). Imponendo la condizione richiesta, otteniamo

$$\sqrt[3]{2e^{3\pi/2} - 3} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{-3 + K \exp(3 \arctan x)} = \sqrt[3]{Ke^{3\pi/2} - 3}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad K = 2\,.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che soddisfa anche la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \sqrt[3]{2 \exp(3 \arctan x) - 3}\,.$$

Esercizio 4

Per studiare gli estremanti relativi di f, utilizzando il teorema di Fermat ed il criterio di monotonia, otteniamo $f'(x) = (2x - x^3) \exp\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right) = x(2 - x^2) \exp\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right) \geq 0$ se e solo se $x(2 - x^2) \geq 0$. Quindi f risulta crescente per $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, +\sqrt{2})$ e decrescente in $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, ovvero $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di massimo relativo (e anche assoluto), mentre, $x = 0$ è punto di minimo relativo. Tenendo conto che, per $x \to \pm\infty$, $f(x) \to 0$ ed $f(0) = 1$, si ricava anche che non esiste alcun punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.
2. Osserviamo che nella prima serie, il termine generale $a_n \sim \frac{n^2}{n^2} = 1 \not\to 0$; quindi essa non converge perché non soddisfa la condizione necessaria. Nella seconda serie, il termine generale $a_n \sim \frac{n^{3/2}}{n^4} = \frac{1}{n^{5/2}} \to 0$, quindi la condizione necessaria è soddisfatta; inoltre, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $5/2 > 1$, la serie risulta convergente. Infine, nella terza serie il termine generale $a_n \sim \frac{n^{3/2}}{n^{5/2}} = \frac{1}{n} \to 0$, quindi la condizione necessaria è soddisfatta; tuttavia, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente 1, la serie risulta divergente.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0;-4\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[5]{x+4} = \sqrt[5]{4} = f(0)\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sin(3x^2)}-1}{\sqrt[3]{4x^8+x^6}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x^2)}{\sqrt[3]{x^6}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x^2} = 3 \neq f(0)\,;$$

dove abbiamo tenuto conto che, per $t\to 0$, $e^t-1\sim t$, con $t=\sin(3x^2)\to 0$ per $x\to 0$, $\sin t\sim t$, con $t=3x^2\to 0$ per $x\to 0$, e $4x^8+x^6\sim x^6$ per $x\to 0$. Pertanto, $x=0$ è un punto di salto per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x=-4$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{(x+4)^4}} \qquad \text{per } x<0\,,\ x\neq -4\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to -2^\pm} f'(x) = \lim_{x\to -4^\pm} \frac{1}{5\sqrt[5]{(x+4)^4}} = +\infty\,,$$

e quindi $x=-4$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la quantità $[1-\log(x^2+1)]$ ha segno variabile ed, in particolare, $[1-\log(x^2+1)]>0$ se e solo se $-\sqrt{e-1}<x<\sqrt{e-1}$. Pertanto, studiamo l'assoluta convergenza applicando il criterio della radice, da cui risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|1-\log(x^2+1)|^n}{n^2+\sqrt{n}+1}} = \big|1-\log(x^2+1)\big| =: \ell\,,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $\sqrt[n]{n^2+\sqrt{n}+1}\to 1$. Consideriamo ora i tre possibili casi.

1. Se $\ell=\big|1-\log(x^2+1)\big|<1$, la serie converge assolutamente, e quindi semplicemente. In particolare, la disequazione $\big|1-\log(x^2+1)\big|<1$ equivale a $-1<1-\log(x^2+1)<1$ ed ha per soluzione $-\sqrt{e^2-1}<x<0\ \vee\ 0<x<\sqrt{e^2-1}$.
2. Se $\ell=\big|1-\log(x^2+1)\big|>1$, cioè $x<-\sqrt{e^2-1}\ \vee\ x>\sqrt{e^2-1}$, la serie non converge assolutamente, ed inoltre il termine n-mo non è infinitesimo, dunque la serie di partenza non converge neppure semplicemente.
3. Se $\ell=\big|1-\log(x^2+1)\big|=1$, cioè $x=\pm\sqrt{e^2-1};0$, il criterio della radice non dà alcuna informazione. Sostituendo $x=\pm\sqrt{e-1};0$ nella serie dei moduli si ottiene $\sum\frac{1}{n^2+\sqrt{n}+1}$, che risulta una serie di convergente per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2>1$. Pertanto la serie proposta converge assolutamente anche per $x=\pm\sqrt{e^2-1};0$.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x)=\frac{2}{3y^2(x)e^{[y^3(x)+2]}}\frac{1}{(x^2+1)}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\frac{1}{2}e^{[y^3(x)+2]} = \int \frac{3}{2}\,y^2 e^{[y^3+2]}\,dy = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C\,,$$

da cui,

$$y(x) = \sqrt[3]{-2+\log\left(2\arctan x + K\right)}\,.$$

Imponendo la condizione richiesta, otteniamo

$$\sqrt[3]{-2+\log(2\pi)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{-2+\log\left(2\arctan x + K\right)} = \sqrt[3]{\log(\pi+K)-2}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad K=\pi\,.$$

Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che soddisfa anche la condizione richiesta ed è data da

$$y(x) = \sqrt[3]{-2+\log\left(2\arctan x + \pi\right)}\,.$$

Esercizio 4

Per studiare gli estremanti relativi di f, utilizzando il teorema di Fermat ed il criterio di monotonia, otteniamo $f'(x) = (x^3-x)\exp\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right) = x(x^2-1)\exp\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right) \geq 0$ se e solo se $x(x^2-1)\geq 0$. Quindi f risulta crescente per $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ e decrescente in $(-\infty,-1)\cup(0,1)$, ovvero $x=\pm1$ sono punti di minimo relativo (e anche assoluto), mentre $x=0$ è punto di massimo relativo. Tenendo conto che, per $x\to\pm\infty$, $f(x)\to+\infty$ ed $f(0)=1$, si ricava anche che non esiste alcun punto di massimo assoluto.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.

2. Osserviamo che nella prima serie, il termine generale $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$, quindi la condizione necessaria è soddisfatta; tuttavia, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente 1, la serie risulta divergente. Nella seconda serie, il termine generale $a_n \sim \frac{n^{7/2}}{n^{7/2}} = 1 \not\to 0$; quindi essa non converge perché non soddisfa la condizione necessaria. Infine, nella terza serie il termine generale $a_n \sim \frac{n^{2/3}}{n^{7/3}} = \frac{1}{n^{5/3}} \to 0$, quindi la condizione necessaria è soddisfatta; inoltre, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $5/3>1$, la serie risulta convergente.