Appello del 2.9.2014: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di integrabilità secondo Riemann per una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ii) Una funzione $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che assume solo un numero finito di valori é sempre integrabile secondo Riemann?

Risposta

(i)

(ii) NO, ad esempio $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times [0,1] \\ 0 & x \in ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]) \times [0,1] \end{cases}$

non è integrabile secondo Riemann

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Per una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in (a,b)$ dare la formula di Taylor con il resto di Lagrange nel punto x_0

(ii) Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 con il resto di Lagrange nel punto $x_0 = 1$ della funzione $f(x) = e^x$.

Risposta

(i)

(ii) $f(1) = e, \quad f'(1) = e, \quad f''(1) = e$

$$f(x) = e + e(x-1) + e\frac{(x-1)^2}{2!} + e^c \frac{(x-1)^3}{3!}$$

Ove $|c-1| < |x-1|$

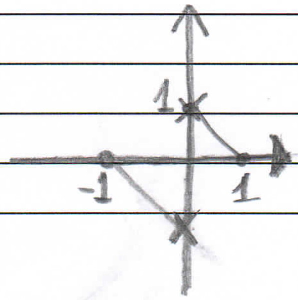
Esercizio 1 **[3 punti]**

La funzione $f(x) = \frac{|x|}{x} - x$ in $D = [-1, 1] \setminus \{0\}$

- [a] ha massimo e minimo assoluto
- [b] non é limitata ;
- [c] ha massimo, ma non minimo ;
- [☒ d] é continua.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in (0, 1] \\ -1 - x, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$



(si noti che in $x = 0$ non è definita)

Esercizio 2 **[3 punti]**

L'integrale improprio $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^5} dx$

- [☒ a] vale 1/5;
- [b] vale −1/5;
- [c] 1;
- [d] diverge.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^5} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{5} e^{-t} dt = \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{1}{5} e^{-t} \right]_0^c = \frac{1}{5}$$

$t = x^5$

Esercizio 3 **[3 punti]**

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie oscillante. Allora

- [a] $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ é oscillante;
- [b] $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitata
- [c] $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é oscillante;
- [☒ d] Nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) NO, per $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ b) NO, per $a_n = (-1)^n n^2$

c) NO, per $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

Esercizio 4

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - y(t) = (1-2t)e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Risoluzione

Eq omogenea: $y''-y=0 \Rightarrow y_0(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-t}$

Sol. particolare: $\bar{y}(t)=t\,e^{-t}(a_1t+a_0)$

$y''-y=(1-2t)e^{-t} \Leftrightarrow (-4a_1+a_0)t+2a_1-a_0=-2t+1$

$\bar{y}(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-t}$

Int. gen. $y(t)=C_1e^{t}+C_2e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$

Sol. pb. Cauchy: $y(t)=\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$

Esercizio 5

[4 punti]

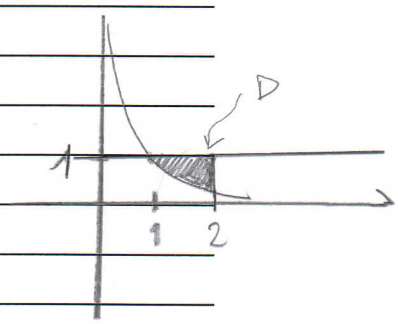
Disegnare l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2,\ \frac{1}{x} \le y \le 1\}$ e calcolare la sua area.

Risoluzione

$A(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{1/x}^{1} 1 \cdot dy\,dx =$

$= \int_1^2 [y]_{1/x}^{1}\,dx = \int_1^2 \left(1-\frac{1}{x}\right) dx =$

$= \left[x - \ln|x|\right]_1^2 = 1 - \ln(2)$



Esercizio 6

[4 punti]

Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

$D_f = \mathbb{R}$, la funzione è PARI, continua in $\mathbb{R}$

- $f(x) = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$

$f(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 2)$

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -4$

- $f(x) = \begin{cases} e^{+x}(x^2 - 4) & \text{se } x \geq 0 \\ e^{-x}(x^2 - 4) & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(x^2 + 2x - 4) & \text{se } x > 0 \\ e^{x}(x^2 - 2x - 4) & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (DISPARI)

$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x^2 + 2x - 4 = 0 \text{ e } x > 0 \iff x = -1 + \sqrt{5} \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \text{ e } x < 0 \iff x = +1 - \sqrt{5} \end{cases}$

$\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ se } x \in (+1 - \sqrt{5}, 0) \cup (-1 + \sqrt{5}, +\infty) \\ f'(x) < 0 \text{ se } x \in (-\infty, +1 - \sqrt{5}) \cup (0, -1 + \sqrt{5}) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -4 \\ \lim_{x \to 0^-} f'(x) = +4 \end{array}\right\}$ non è derivabile in 0