E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 30.5.2017: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme $A \subset \mathbb{R}$.

(ii) Dare la definizione di limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di derivata direzionale per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il Teorema del Gradiente

Risposta

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora

a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = +\infty$

~~b~~ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ non é oscillante

c $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n} < +\infty$

d $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n^2} = +\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

a) No, per $a_n = n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ converge.

c) No, per $a_n = n$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$

d) No, per $a_n = n$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

L'integrale $\int_0^2 e^{2x}(2x+3)dx$ vale

a $e^4 - 3$

b $e^4 + 1$

~~c~~ $3e^4 - 1$

d $5e^4 + 1$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$\int_0^2 e^{2x}(2x+3)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}(2x+3)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{\cancel{2}}e^{2x}\cdot\cancel{2}\,dx = \frac{1}{2}e^4\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot 3$

$- \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \frac{7}{2}e^4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2} = 3e^4 - 1$

Esercizio 3

[3 punti]

L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x^2 + x^3 + y^2 + xy^2$ nel punto $(-1,2)$ é

a $z = 5y - 5$

~~b~~ $z = 5x + 5$

c $z = -5y$

d $z = -5x - 5$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$Df(x,y) = (2x + 3x^2 + y^2,\ 2y + 2xy)$,

$Df(-1,2) = (5, 0)$

$z = f(x_0,y_0) + Df(x_0,y_0)\cdot(x - x_0, y - y_0)$

$z = 5x + 5$

Esercizio 4

[5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x^2))}{x^2+x^3}.$$

Risoluzione

$x^2 + x^3 \sim x^2$

$\sin(x^2) = x^2 + o(x^2)$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\ln(1+\sin(x^2)) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x^2))}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

Esercizio 5

[4 punti]

Per quali a, $b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} - 1, & x \geq 0; \\ \cos(x) - b, & x < 0. \end{cases}$$

é derivabile in $\mathbb{R}$?

Risoluzione

Continuità: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) \iff$

$\lim_{x\to 0^+} e^{ax} - 1 = \lim_{x\to 0^-} \cos(x) - b \iff 0 = 1 - b \iff \boxed{b=1}$

Derivabilità ($b=1$ poiché continuità è CN)

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) \iff \lim_{x\to 0^+} a e^{ax} = \lim_{x\to 0^-} (-\sin(x))$

$\iff \boxed{a=0}$

Quindi f è derivabile per $b=1$ e $a=0$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+3}$ e disegnarne un grafico approssimativo.

Risoluzione

D_f: $x^2+2x \geq 0$, $x+3 \neq 0$, quindi $(-\infty,-3) \cup (-3,-2] \cup [0,+\infty)$

Segno: $f(x) \geq 0 \iff x+3 \geq 0$, quindi

$f(x) > 0$ in $(-3,-2) \cup (0,+\infty)$
$f(x) < 0$ in $(-\infty,-3)$

Limiti: $\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$ (asintoto verticale)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$ (asintoti orizz.)

Derivata: $f'(x) = \dfrac{(x+3)\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} - \sqrt{x^2+2x}}{(x+3)^2}$

$= \dfrac{(x+3)(x+1)-(x^2+2x)}{(x+3)^2\sqrt{x^2+2x}} = \dfrac{2x+3}{(x+3)^2\sqrt{x^2+2x}}$

$f'(x) < 0$ in $(-\infty,-3) \cup (-3,-2)$ (non ci sono punti critici nel dominio)

$f'(x) > 0$ in $(0,+\infty)$