B

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 1.2.2017: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivata $f'(x_0)$ per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

(ii) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \frac{x^2-2}{4x-3}$ nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

(i)

(ii) $f(1) = -1$, $f'(1) = 6$, quindi

$y = -1 + 6(x-1) \iff y = 6x - 7$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il teorema del valor medio di Lagrange.

(ii) Trovare un punto c del teorema di Lagrange per $f(x) = x^2 + x - 1$ in $[1, 2]$.

Risoluzione

(i)

(ii)

$f'(x) = 2x+1$, quindi $f'(c) = 2c+1$

$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = f'(c) \iff \frac{5-1}{1} = 2c+1 \iff$

$\boxed{c = \frac{3}{2}}$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie divergente a termini strettamente positivi. Allora

☒ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{k=0}^{m} a_k > 1$

☐ b $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

☐ c $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ non converge;

☐ d $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge;

Risoluzione (giustificare la risposta)

b) No, per $a_n = 1/n$, infatti $\sum_n 1/n = +\infty$ e $\lim_n 1/n = 0$

c) No, per $a_n = \frac{1}{n}$, infatti $\sum_n 1/n = +\infty$ e $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ converge

d) No, per $a_n = \frac{1}{n}$, infatti $\sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ e $\sum_n n = +\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ una funzione dispari. Allora

☐ a f é derivabile in 0

☒ $\lim_{x\to-\sqrt{\pi}} f(x) = -f(\sqrt{\pi})$

☐ c f é crescente

☐ d f ammette limite (finito o infinito) per $x \to +\infty$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poichè f è continua $\lim_{x\to-\sqrt{\pi}} f(x) = f(-\sqrt{\pi})$ e poichè f è dispari $f(-\sqrt{\pi}) = -f(\sqrt{\pi})$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Indicare quale tra le seguenti affermazioni é *falsa*.

☐ a Se (x_0, y_0) é un punto di estremo locale, allora $Df(x_0, y_0) = 0$

☐ b f é continua in (x_0, y_0)

☐ c $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = Df(x_0, y_0) \cdot v$ per ogni versore $v \in \mathbb{R}^2$

☒ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti f differenziabile non implica esistenza derivate seconde nel punto (x_0, y_0)

B

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y(t) = t$$

Risoluzione

1) Eq. omogenea: $y'' - 5y' + 6y = 0$, quindi $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, da cui

$$y_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

2) Sol. particolare con metodo di somiglianza: $f(t) = t$

$\bar{y}(t) = At + B \Longrightarrow \bar{y}'(t) = A$, $\bar{y}''(t) = 0$. Sostituendo nell'equazione $-5A + 6At + 6B = 0$ da cui $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{5}{36}$ quindi

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$$

3) Integrale generale

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{6}t + \frac{5}{36}$$

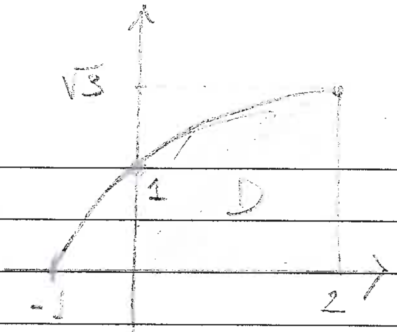
Esercizio 5

[4 punti]

Disegnare il dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ 0 \leq y \leq \sqrt{x+1}\}$ e calcolare

$$\iint_D \sqrt{y} + xy \, dxdy$$

Risoluzione



$$\iint_D \sqrt{y} + xy\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x+1}} xy + \sqrt{y} \;\; dy \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^{\sqrt{x+1}} dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x(x+1)}{2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/4} dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{8}{21}(x+1)^{7/4} \right]_0^2 =$$

$$= \frac{8}{6} + 1 + \frac{8}{21} 3^{7/4}$$

Esercizio 6

[5 punti]

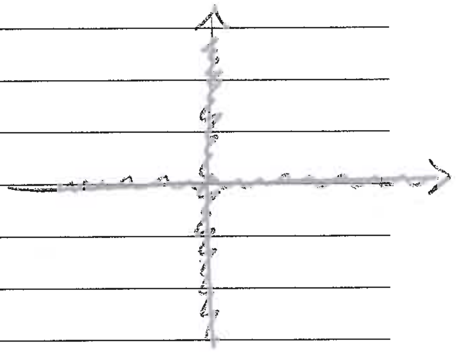
Trovare il dominio D e i punti di massimo e minimo relativo interni a D della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2y^2}$$

Risoluzione

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } y \neq 0 \}$

cioè $\mathbb{R}^2$ meno gli assi cartesiani



$$Df(x,y) = \left(2x - \frac{4}{x^3}, 2y - \frac{1}{y^3} \right) = (0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{4}{x^3} = 0 & \Longleftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{2} \\ 2y - \frac{1}{y^3} = 0 & \Longleftrightarrow y = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$P_1 = \left(\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right)$, $P_2 = \left(\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right)$, $P_3 = \left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right)$, $P_4 = \left(-\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{12}{x^4} & 0 \\ 0 & 2 + \frac{3}{y^4} \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_i) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \forall i = 1,2,3,4$$

quindi P_1, P_2, P_3, P_4 sono punti di minimo locale