D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 9.1.2017: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Fare un esempio di successione non limitata, ma non divergente.

Risposta

(i)

(ii)

$a_n = (-1)^n n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Fare un esempio di funzione derivabile, ma non differenziabile

Risoluzione

(i)

(ii)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie convergente a termini positivi. Allora

- [a] $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
- [b] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é monotona
- [X] $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ non é limitata;
- [d] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ non converge

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \\ a_n \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0^+ \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = x^2 \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$,

- [a] ha limite ∞ per $x \to +\infty$
- [b] é monotona non decrescente
- [X] ha integrale nullo in $[-5, 5]$
- [d] non é derivabile in $\frac{\pi}{2}$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poiché $f(x) = x^2 \sin(x)$ è dispari, $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia f una funzione regolare tale che formula $\int_0^1 (f(x) + xf'(x))dx = 0$ é

- [a] vera se f é concava
- [b] sempre falsa
- [c] vera se $f(0) = 0$
- [X] vera se $f(1) = 0$

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

integrando per parti $\int_0^1 x f'(x) dx$

$$\int_0^1 (f(x) + x f'(x))\,dx = \left[x f(x)\right]_0^1 + \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx =$$

$$= 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) = 0 \quad \text{se } f(1) = 0$$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x(e^{x^2}-1))}{x^3+x^6}$$

Risoluzione

$x^3+x^6 \sim x^3$

$\ln(1+t) = t + o(t)$

$x(e^{x^2}-1) = x(x^2+o(x^2)) = x^3+o(x^3)$

$\ln(1+x(e^{x^2}-1)) = (x^3+o(x^3)) + o(x^3+o(x^3)) = x^3+o(x^3) \sim x^3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x(e^{x^2}-1))}{x^3+o(x^3)} = 1$$

Esercizio 5

[4 punti]

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)y'(t)+y^2(t)=0 \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

Risoluzione

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{-y^2(t)}{t^2+1} \\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

Eq. a variabili separabili

$g(y) = -y^2$, $h(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$

($g \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists! \, y$ sol. locale del pb.)

- Sol. stazionarie

$g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = 0$, quindi per $\alpha = 0$ sol. stazionaria

- Per $\alpha \neq 0$, $\displaystyle\int_\alpha^{y(t)} -\frac{1}{r^2}\,dr = \int_0^t \frac{1}{r^2+1}\,dr \iff \left[\frac{1}{r}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\arctan(r)\right]_0^t$

$$\iff y(t) = \frac{\alpha}{1+\alpha\arctan(t)}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2}{\ln(x)-1}$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

- Dominio: $x>0$, $\ln(x)-1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D}_f = (0,+\infty)\setminus\{e\}$
- Radici: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2=0$ (non appartiene al dominio)
- Segno: $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln(x)-1>0 \Leftrightarrow x>e$
  $f(x)<0 \Leftrightarrow \ln(x)-1<0 \Leftrightarrow x\in(0,e)\setminus\{1\}$
- Limiti: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\ln(x)-1} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln(x)-1} = +\infty$ (Hopital)

$$\lim_{x\to e^-} \frac{x^2}{\ln(x)-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to e^+} \frac{x^2}{\ln(x)-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- Derivata: $f'(x) = \frac{x(2\ln(x)-3)}{(\ln(x)-1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$

$f'(x)>0$ per $x>e^{3/2}$
$f'(x)<0$ per $x<e^{3/2}$

$\Rightarrow x=e^{3/2}$ punto di minimo locale
$f(e^{\frac{3}{2}})=2e^3$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$