Appello del 25.6.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+1+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivate parziali di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Calcolare le derivate parziali di $f(x,y) = xe^{2xy}$ in $(1,1)$

(iii) Fare un esempio di una funzione f continua, ma non derivabile in $(0,0)$.

Risposta

(i)

(ii) $\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = e^{2xy} + 2xy\,e^{2xy} \\ f_y(x,y) = 2x^2 e^{2xy} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f_x(1,1) = 3e^2 \\ f_y(1,1) = 2e^2 \end{array}\right.$

(iii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di dominio x-semplice

(ii) Enunciare il Teorema di Fubini-Tonelli per gli integrali doppi

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata e $m = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\lim_{n\to\infty} a_n = m$
- [b] $a_n > m$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
- [☒ c] $\forall\epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n - \epsilon < m$;
- [d] se $\lim_{n\to\infty} a_n = m$, allora $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dalla def. di estremo inferiore di $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$, $\forall \varepsilon>0$

$\exists\, a_{n_0} \in \{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ t.c. $a_{n_0} - \varepsilon < \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

Esercizio 2

[3 punti]

La successione $a_n = n^{(-1)^n}$ é

- [☒ a] oscillante
- [b] convergente
- [c] divergente
- [d] limitata

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$a_n = \begin{cases} n & n = 2K \\ \frac{1}{n} & n = 2K+1 \end{cases}$$

quindi oscillante

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e con derivata prima strettamente positiva. Allora:

- [a] f é crescente in D
- [b] f non ha punti di massimo o minimo in D
- [c] f é suriettiva
- [☒ d] f é continua in D

Risoluzione (giustificare la risposta)

(d) Se f è derivabile, allora f è continua

(Si osservi che se D non è un intervallo, allora $f' > 0$ in D non implica f crescente in D)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$$

Risoluzione

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2 = \left(\cancel{1} + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2 =$$

$$= x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\right) + o(x^4) \sim \frac{11}{24}x^4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{x^4} = \frac{11}{24}$$

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} (t^2+1)y'(t) + y^2(t) = 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. a var. separabili:

$$y'(t) = \frac{-y^2(t)}{1+t^2} \qquad g(y) = -y^2, \quad f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

(sono verificate le cond. di esistenza ed unicità locale)

1) Sol stazionarie

$g(\alpha) = 0 \iff -\alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$: quindi per $\alpha = 0$, $y(t) \equiv 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ è sol. stazionaria

2) Separazione variabili ($\alpha \neq 0$)

$$\int_{\alpha}^{y(t)} -\frac{1}{r^2}\,dr = \int_0^t \frac{1}{1+r^2}\,dr \iff \left[\frac{1}{r}\right]_{\alpha}^{y(t)} = \left[\arctg(r)\right]_0^t \iff$$

$$\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{\alpha} + \arctg(t) \iff y(t) = \frac{\alpha}{1 + \alpha\arctg(t)}$$

Esercizio 6

[4 punti]

Trovare i punti critici di $f(x, y) = y - y^3 - yx^2$ e classificarli

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R})$

$Df(x,y) = (-2xy, 1 - 3y^2 - x^2)$

$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} -2xy = 0 \iff x = 0 \text{ o } y = 0 \\ 1 - 3y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 = 1 \iff y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \iff x = \pm 1 \end{cases}$

Punti critici: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right); (1, 0); (-1, 0)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{bmatrix}$

- $Hf\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ Punto di massimo locale
- $H\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ Punto di minimo locale
- $H(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ Punto di sella
- $H(-1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Punto di sella