D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 26.6.2018: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di successione monotona.

(ii) Enunciare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di matrice Hessiana per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(ii) Enunciare il teorema sulle condizioni sufficienti per l'esistenza degli estremi locali di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $a_n = \frac{4^n - 5n}{\pi^n - n^3}$ é

- [a] infinitesima
- [b] oscillante
- [c] asintotica a $-\dfrac{1}{n^2}$
- [X] divergente

Risoluzione (giustificare la risposta)

$a_n \sim \frac{4^n}{\pi^n} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^n$, quindi $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Esercizio 2

[3 punti]

La funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$

- [a] soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle in $[-1, 1]$
- [b] é invertibile
- [c] é pari
- [X] ammette minimo assoluto

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, inoltre $f(0) = 0$, quindi

$\min_{\mathbb{R}} f = 0$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to R$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Indicare quale tra le seguenti affermazioni é *falsa*

- [a] f é continua in (x_0, y_0)
- [b] esistono le derivate parziali di f in (x_0, y_0)
- [c] esiste il piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0)
- [X] $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$

Risoluzione (giustificare la risposta)

La differenziabilità non implica l'esistenza delle derivate seconde

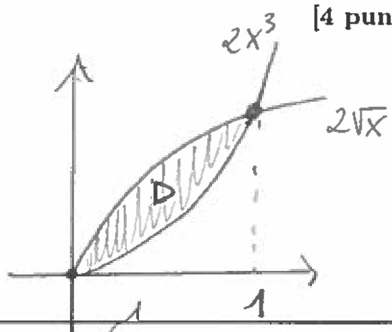
Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy$$

ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\}$.



Risoluzione

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{2x^3}^{2\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_0^1 \left(2x^{3/2} + 2x - 2x^6 - 2x^4\right) dx = 2\left[\frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left[\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right] = \frac{39}{35}$$

Esercizio 5

[5 punti]

Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ e classificarli.

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R})$, $Df(x,y) = (6x^2 - 6y, -6x + 6y)$

$$Df(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 - 6x = 0 \\ x = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Punti critici: $(0,0)$, $(1,1)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$ $(0,0)$ punto di sella

$$Hf(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$ $(1,1)$ punto di minimo

Esercizio 6

[5 punti]

Risolvere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) + \frac{y^2(t)}{t^2} = 0 \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Risoluzione

Eq a variabili separabili $y'(x) = -\frac{y^2(t)}{t^2}$

1) $f(t) = -\frac{1}{t^2}$, $g(y) = y^2$ quindi sono verificate le cond di esistenza ed unicità locale

2) Sol. stazionarie : $g(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 = 0 \iff \alpha = 0$

Per $\alpha = 0$, sol. stazionaria: $y(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

3) Per $\alpha \neq 0$, separazione variabili

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{dr}{r^2} = \int_1^t -\frac{1}{r^2}\, dr \iff \left[-\frac{1}{r}\right]_\alpha^{y(t)} = \left[\frac{1}{r}\right]_1^t \iff$$

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{t} - 1 \iff \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{t} + 1$$

$$\iff y(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{t} + 1}$$