Appello del 3.9..2015: Compito A

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza per una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(ii) Descrivere il comportamento della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ al variare di $q \in \mathbb{R}$.

Risposta

(i)

(ii)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il *Teorema di Schwarz.*

(ii) Quale proprietà importante per la matrice Hessiana segue dal Teorema di Schwarz?

Risoluzione

(i)

(ii)

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $\sqrt{|a_n|} \sim e^{-n}$ per $n \to \infty$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- $\cancel{\boxed{a}}$ converge;
- $\boxed{b}$ diverge;
- $\boxed{c}$ é irregolare;
- $\boxed{d}$ non si puó dire nulla.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poichè $\sqrt{|a_n|} \sim e^{-n} \Rightarrow |a_n| \sim e^{-2n} = (e^{-2})^n$ e la serie $\sum_n (e^{-2})^n$ è una serie geometrica convergente, allora $\sum |a_n|$ converge, quindi $\sum_n a_n$ converge

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b) e tale che esiste $c \in (a, b)$ per cui $f'(c) = 0$. Allora

- $\boxed{a}$ $f(a) = f(b)$;
- $\boxed{b}$ f ha un minimo locale in c;
- $\cancel{\boxed{c}}$ f ha massimo assoluto in $[a, b]$;
- $\boxed{d}$ f ha minimo assoluto in (a, b).

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

Poichè f è continua in $[a, b]$, dal Teo. di Weierstrass ammette massimo assoluto in $[a, b]$

Esercizio 3

[3 punti]

Siano A e B due insiemi limitati non vuoti. Quale delle seguenti affermazioni é equivalente a dire che $\inf A \leq \inf B$

- $\boxed{a}$ Per ogni $a \in A$, esiste $b \in B$ t.c. $a \leq b$
- $\cancel{\boxed{b}}$ Per ogni $\epsilon > 0$ e $b \in B$, esiste $a \in A$ t.c. $a \leq b + \epsilon$.
- $\boxed{c}$ Per ogni $a \in A$, esiste $b \in B$ tale che $a \geq b$
- $\boxed{d}$ Esiste $b \in B$ t.c. $a < b$ per ogni $a \in A$.

Risoluzione **(giustificare la risposta)**

a) falsa per $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $B = [0, 1]$

d) falsa per $A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $B = [0, 1]$

c) falsa, infatti in questo caso si avrebbe $\inf B \leq \inf A$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y'(t) + 13y(t) = te^t$$

Risoluzione

Eq. del 2° ordine a coeff. costanti non omogenea

Eq. omogenea: $y'' - 4y' + 13y = 0$; pol. caratteristico : $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$

$\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$

$$y_0(t) = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t)$$

Sol. particolare (metodo di somiglianza) $\bar{y}(t) = (At + B)e^t$

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ -2A + 10B = 0 \end{cases} \qquad \bar{y}(t) = \left(\frac{1}{10}t + \frac{1}{50}\right) e^t$$

Sol. generale :

$$y(t) = C_1 e^{2t} \cos(3t) + C_2 e^{2t} \sin(3t) + \left(\frac{1}{10}t + \frac{1}{50}\right) e^t$$

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3(e^x - \cos(x))}$$

Risoluzione

$$e^x - \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right) = x + o(x) \sim x$$

quindi $x^3(e^x - \cos(x)) \sim x^4$

$$x^2 - \sin^2(x) = x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 = x^2 - x^2 + \frac{2x^4}{6} + \cdots =$$

$$= \frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim \frac{x^4}{3}$$

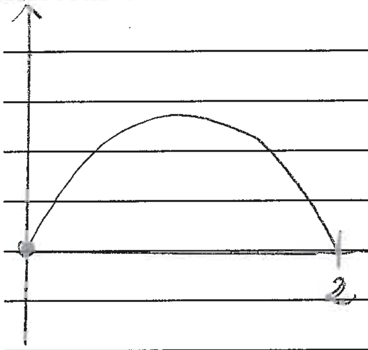
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^3(e^x - \cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Calcolare $\iint_D xy\,dxdy$ ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2x - x^2\}$.

Risoluzione



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^{2x-x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^2 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_0^{2x-x^2}$$

$$= \int_0^2 \frac{x(2x-x^2)^2}{2}\,dx = \int_0^2 \left(2x^3 - 2x^4 + \frac{x^5}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{12} \right]_0^2 = \frac{8}{15}$$