Appello del 4/7/2019: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1 [3+2 punti]

(i) Dare la definizione di differenziabilità per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nel punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Fare un esempio di funzione derivabile, ma non differenziabile

Risposta

(i) ______________________________

(ii) ______________________________

Domanda 2 [2+3 punti]

(i) Dare la definizione di convergenza assoluta per una serie numerica.

(ii) Enunciare il Criterio di Leibniz.

Risoluzione

(i) ______________________________

(ii) ______________________________

Esercizio 1 [3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ e sia $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Allora

- [a] $\sup A = \ell$
- [b] $\inf A = \ell$
- [c] $\inf A < \ell < \sup A$;
- [X] A é limitato

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché una successione convergente è limitata, si ha che A è limitato

Esercizio 2 [3 punti]

Sia $f(x) = e^{2x} + x + 3$. Allora la derivata della sua funzione inversa f^{-1} in $y = 4$

- [a] non esiste
- [b] é 0
- [c] é 3
- [X] é $\frac{1}{3}$

Risoluzione (giustificare la risposta)

$f(x) = 4 \iff e^{2x} + x + 3 = 4 \iff x = 0$.

$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$

Esercizio 3 [3 punti]

Sia $f(x) = x^6 + 6x + 1$ e $p(x)$ il suo polinomio di Taylor di ordine 8 in $x_0 = 0$. Allora $p'(-1)$ é uguale a

- [a] -1
- [b] 1
- [c] 4
- [X] nessuna delle precedenti.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $f(x) = x^6 + 6x + 1$ è un polinomio di grado 6, allora $P_8(x) = f(x)$, quindi $p'(-1) = 6(-1)^5 + 6 = 0$

Esercizio 4

[5 punti]

Verificare se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}}, & -2 < x < 0; \\ \frac{1}{\sqrt{x+e}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

é continua in 0.

Risoluzione

Bisogna verificare che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2+x-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{2+x}{x}}\right)^{\frac{2+x}{x}}\right]^{\frac{x}{2+x}\cdot\frac{1}{x}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x+e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

quindi la funzione è continua

Esercizio 5

[4 punti]

Trovare i punti critici di $f(x,y) = 3x^4 + 2y^6 + 12xy$ e classificarli.

Risoluzione

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $Df(x,y) = (12x^3 + 12y, 12y^5 + 12x) = (0,0)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ -x^{15} + x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x(x^{14} - 1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$P_0 = (0,0)$, $P_1 = (1,-1)$, $P_2 = (-1,1)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 36x^2 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

punto di max. locale

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

punto di sella

$$Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 36 & 12 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

punto di minimo locale

Esercizio 6

[4 punti]

Risolvere l'equazione

$$y''(t) - 4y'(t) = t^2 + 1.$$

Risoluzione

Eq. del 2° ordine a coeff. costanti

1) Eq. omogenea

$y'' - 4y' = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 4) = 0$

$y_0(t) = C_1 + C_2 e^{4t}$

2) Sol. particolare eq. non omogenea

$f(t) = t^2 + 1$ $\quad \begin{cases} m = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \implies k = 1$ poiché 0 è radice del pol. caratt.

$\bar{y}(t) = t(a_2 t^2 + a_1 t + a_0) =$

$= a_2 t^3 + a_1 t^2 + a_0 t$

$\bar{y}'(t) = 3a_2 t^2 + 2a_1 t + a_0 \quad , \quad \bar{y}''(t) = 6a_2 t + 2a_1$

$6a_2 t + 2a_1 - 12 a_2 t^2 - 8a_1 t - 4a_0 = t^2 + 1$

$\begin{cases} -12a_2 = 1 \\ 6a_2 - 8a_1 = 0 \\ 2a_1 - 4a_0 = 1 \end{cases} \implies \bar{y}(t) = -\frac{1}{12}t^3 - \frac{t^2}{16} - \frac{9}{32}t$

3) Integrale generale

$y(t) = y_0(t) + \bar{y}(t) = C_1 + C_2 e^{4t} - \frac{1}{12}t^3 - \frac{t^2}{16} - \frac{9}{32}t$