Appello del 10.2.2014: Compito A

Nome: Cognome: Matricola:

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}$ per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Data $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che 1 di accumulazione per D, dare la definizione di $\lim_{x \to 1} f(x) = 7$.

Risposta

(i) x_0 è di accumulazione per D se $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ t.c. $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

(ii) $\lim_{x \to 1} f(x) = 7$ se $\forall \{x_n\}$ t.c. $x_n \in D$, $x_n \neq 1$ e $\lim_n x_n = 1$, allora $\lim_n f(x_n) = 7$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema sulla regolarità delle successioni monotone.

(ii) Fare un esempio di successione crescente con limite finito

Risposta

(i) TEO: Una successione $\{a_n\}$ monotona è regolare.

1) Se $\{a_n\}_n$ è crescente, $\lim_{n \to \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

2) Se $\{a_n\}$ è decrescente, $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

(ii)

Se $a_n = 1 - \frac{1}{n}$, allora $\{a_n\}$ è crescente

$\lim_{n \to \infty} a_n = 1$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n \geq 0$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, ove

- [a] $b_n = 3^n a_n$, non converge;
- [b] $b_n = n a_n$, non converge;
- [c] $b_n = \dfrac{a_n}{n^{1/8}}$, converge;
- [~~d~~] $b_n = (a_n)^n$, converge.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Per il criterio della radice, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia f una funzione continua tale che $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$. Allora $f(1)$ vale

- [a] 1
- [b] 4
- [~~c~~] 5
- [d] 3

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale,

$f(x) = D(x^2(1+x))$, quindi $f(x) = 2x(1+x) + x^2$ e

$f(1) = 5$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x) = 3e^{-5x} - 2x$

- [~~a~~] ha uno zero positivo
- [b] é limitata superiormente
- [c] ha un punto critico
- [d] é limitata inferiormente

Risoluzione (giustificare la risposta)

f ha uno zero positivo poiché f è continua, $f(0) = 3$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e quindi esiste $\bar{x}$ t.c. $f(\bar{x}) < 0$. Pertanto si applica teo. degli zeri in $[0, \bar{x}]$

Esercizio 6 **[4 punti]**

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) = 4\cos(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

- Eq. omogenea: $y'' + 4y' = 0$

Pol. caratteristico: $\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -4$

$y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- Sol particolare (metodo di somiglianza)

$\bar{y}(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

$\bar{y}'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

$\bar{y}''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$,

Quindi $-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 8A\sin(2t) +$

$+ 8B\cos(2t) = 4\cos(2t) \iff \begin{cases} -4A + 8B = 4 \\ -8A - 4B = 0 \end{cases}$

$\iff A = -\frac{1}{5}, \quad B = \frac{2}{5}$

Integrale generale

$y(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} - \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t)$

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{5} = 0$

$y'(t) = -4C_2 e^{-4t} + \frac{2}{5}\sin(2t) + \frac{4}{5}\cos(2t)$

$y'(0) = -4C_2 + \frac{4}{5} = 0 \implies C_2 = \frac{1}{5}$

$C_1 = 0$

Soluzione

$y(t) = \frac{1}{5}e^{-4t} - \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t)$

A

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = y^3x + y^2 - x^2$$

e classificarli.

Risoluzione

$$Df(x,y) = (y^3 - 2x,\ 3y^2x + 2y) = 0 \iff \begin{cases} x = \frac{y^3}{2} \\ y\left(\frac{3}{2}y^4 + 2\right) = 0 \end{cases}$$

$\iff (x,y) = (0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 3y^2 \\ 3y^2 & 6y+2 \end{bmatrix} \implies \det(Hf(0,0)) = -4 < 0$$

$(0,0)$ è un punto di sella

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln(x^2 + 1)} \right)$$

Risoluzione

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\ln(x^2+1)}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+1) - x^2}{x^2 \ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2}{x^4} = -\frac{1}{2}$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \implies \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

e $x^2 \ln(1+x^2) \sim x^4$ per $x \to 0$