Appello del 7.1.2015: Compito A

D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione di derivabilità per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(ii) La funzione $f(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
é derivabile in $\mathbb{R}$?

Risposta

(i) f è derivabile in x_0 se esiste
$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

(ii) Per $x \neq 0$, f è derivabile. Per $x=0$
$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos(\frac{1}{h})}{h} = 0$, quindi
f è derivabile in $x_0 = 0$ e $f'(0) = 0$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Dare la definizione e fare un esempio di successione monotona crescente.

(ii) Enunciare il teorema sulla regolarità delle successioni monotone.

Risoluzione

(i) $\{a_n\}$ è monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\{e^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente poiché $e^n \leq e^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Una successione monotona è regolare. In particolare
1) Se $\{a_n\}_n$ è crescente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
2) Se $\{a_n\}_n$ è decrescente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf_n \{a_n\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

Esercizio 1

[3 punti]

La successione $\{(\pi^n)^{(-1)^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$

- [a] non limitata ;
- [b] diverge;
- [c] limitata superiormente;
- [d] converge.

Risoluzione (giustificare la risposta)

$$(\pi^n)^{(-1)^n} = \begin{cases} \pi^n & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{1}{\pi^n} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases},$$

quindi la risposta $\boxed{a}$ poiché $\lim_{n\to+\infty} \pi^n = +\infty$, $\lim_n \frac{1}{\pi^n} = 0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che la funzione $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ é crescente in $\mathbb{R}$. Allora

- [a] $f' \geq 0$ in $\mathbb{R}$
- [b] f é crescente in $\mathbb{R}$
- [c] f é costante
- [X] $f \geq 0$ in $\mathbb{R}$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché F è crescente, $F'(x) = f(x) \geq 0$ in $\mathbb{R}$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ e sia (x_0, y_0) un punto critico di f. Allora (x_0, y_0) é un punto di sella se

- [a] $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$
- [b] $f_{xx}((x_0, y_0) < 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) \neq 0$
- [X] $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}((x_0, y_0) = 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) > 0$
- [d] $f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}((x_0, y_0) > 0$ e $f_{xy}(x_0, y_0) < 0$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Infatti $\det(Hf(x_0, y_0)) = -f_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0$

e quindi (x_0, y_0) punto di sella.

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2x+3}}\,dx$$

Risoluzione

$t = \sqrt{2x+3} \iff x = \frac{t^2-3}{2}$, $dx = t\,dt$

$\int_{-1}^{1/2} e^{\sqrt{2x+3}}dx = \int_1^2 te^t\,dt = \left[te^t\right]_1^2 - \int_1^2 e^t\,dt =$

$= \left[te^t - e^t\right]_1^2 = e^2$

Esercizio 5

[5 punti]

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^{-x}}{x^2}$$

Risoluzione

$\ln(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$

$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right] = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

$e^{-x} = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)$

$\ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^{-x} = -x - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x^2}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) =$

$= -\frac{7}{6}x^2 + o(x^2)$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x) + \frac{\sin(x)}{x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{7}{6}$

Esercizio 6

[5 punti]

Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y(t)\ln(t) \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

Risoluzione

Equazione a variabili separabili
$g(y) = y$, $f(t) = \ln(t)$

Poichè $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^0((0,+\infty))$ esiste un'unica sol. in $(1-\delta, 1+\delta)$ con $\delta > 0$

- Sol. stazionaria
  $g(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$; quindi $y(t) = 0$ è sol. del pb. di Cauchy se $y(1) = 0$
- Se $\alpha \neq 0$

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{1}{r}\,dr = \int_1^t \ln(r)\,dr$$

$$\ln|y(t)| - \ln|\alpha| = t\lg(t) - t + 1$$

$$|y(t)| = e^{\ln|\alpha| + t\lg|t| - t + 1} = |\alpha|\, e^{t\ln(t) - t + 1}$$

Quindi $y(t) = \alpha\, e^{t\ln(t) - t + 1}$

OSS: Si poteva risolvere più direttamente osservando che l'equazione $y'(t) = y(t)\ln(t)$ è un'eq. diff lineare del tipo $y'(t) = a(t)y + b(t)$ con $a(t) = \ln(t)$, $b(t) = 0$