D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello del 10.2.2014: Compito B

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di punto di accumulazione $x_0 \in \mathbb{R}$ per un insieme $D \subset \mathbb{R}$.

(ii) Data $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che 3 di accumulazione per D, dare la definizione di $\lim_{x\to 3} f(x) = -2$.

Risposta

(i) vedi compito A

(ii) $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ se $\forall \{x_n\}$ t.c. $x_n \in D$, $x_n \neq 3$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$

$\Rightarrow \lim_{n} f(x_n) = -2$

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema sulla regolarità delle successioni monotone.

(ii) Fare un esempio di successione decrescente con limite finito

Risposta

(i) Vedi compito A

(ii) Se $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, allora $\{a_n\}$ è decrescente e $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Esercizio 1

[3 punti]

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_n \geq 0$ and $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, ove

- [a] $b_n = \frac{a_n}{n^{1/6}}$, converge;
- [b] $b_n = \frac{a_n}{n^3}$, non converge;
- [c] $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, non converge;
- [~~d~~] $b_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^n$, converge.

Risoluzione (giustificare la risposta)

Criterio della radice $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 < 1$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia f una funzione continua tale che $\int_0^x f(t)dt = x(1+x)$. Allora $f(1)$ vale

- [a] 1
- [b] 4
- [c] 5
- [~~d~~] 3

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo. fondamentale del calcolo integrale

$f(x) = D(x(1+x)) \Longrightarrow f(x) = 1 + 2x$ e $f(1) = 3$

Esercizio 3

[3 punti]

La funzione $f(x) = e^{5x} + 8x$

- [a] ha un punto critico
- [b] é limitata
- [~~c~~] ha uno zero negativo
- [d] é decrescente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dal teo. degli zeri, poiché $f(0) = 1$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

B

Esercizio 4

[4 punti]

Trovare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3y + x^2 - y^2$$

e classificarli.

Risoluzione

$Df(x,y) = (3x^2y + 2x, x^3 - 2y) = (0,0) \iff$

$\begin{cases} y = x^3/2 \\ x\left(\frac{3}{2}x^4 + 2\right) = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy + 2 & 3x^2 \\ 3x^2 & -2 \end{bmatrix}$

$\det(Hf(0,0)) = -4 < 0 \implies (0,0)$ punto di sella

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^{x^2} - 1} \right)$$

Risoluzione

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^{x^2} - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^2(e^{x^2} - 1)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1} - \cancel{x^2}}{x^4} = \frac{1}{2}$

$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \implies e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$x^2(e^{x^2} - 1) \sim x^4$ per $x \to 0$

Esercizio 6

[4 punti]

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) = 4\sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione

- Eq omogenea: $y'' + 4y' = 0$

Pol caratteristico $\lambda^2 + 4\lambda = 0 \iff \lambda = 0, \lambda = -4$

$y_0(t) = C_1 + C_2 e^{-4t}$

- Sol particolare

$\bar{y}(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$

$\bar{y}'(t) = -2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)$

$\bar{y}''(t) = -4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)$

Quindi

$-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t) - 8A\sin(2t) + 8B\cos(2t) =$

$= 4\sin(2t) \iff \begin{cases} -4A + 8B = 0 \\ -8A - 4B = 4 \end{cases}$

$\iff A = -\frac{2}{5},\ B = -\frac{1}{5}$

Integrale generale

$y(t) = C_1 + C_2 e^{-4t} - \frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{1}{5}\sin(2t)$

$y(0) = C_1 + C_2 - \frac{2}{5} = 0$

$y'(t) = -4C_2 e^{-4t} + \frac{4}{5}\sin(2t) - \frac{2}{5}\cos(2t)$

$y'(0) = -4C_2 - \frac{2}{5} = 0 \implies C_2 = -\frac{1}{10},\ C_1 = \frac{5}{10}$

Soluzione

$y(t) = \frac{5}{10} - \frac{1}{10}e^{-4t} - \frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{1}{5}\sin(2t)$