D1	
D2	
E1	
E2	
E3	
E4	
E5	
E6	
Σ	

Appello di Ing.Gestionale del 12.1.2018: **Compito B**

Nome: **Cognome:** **Matricola:**

Domanda 1

[2+3 punti]

(i) Dare la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

(ii) Fare un esempio di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = 0$, $\sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = +\infty$

Risposta

(i)

(ii) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n \text{ dispari} \\ n & n \text{ pari} \end{cases}$ (ovvero $a_n = n^{(-1)^n}$)

Domanda 2

[3+2 punti]

(i) Enunciare il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

(ii) Scrivere l'equazione del retta tangente al grafico di $F(x) = 3 + \int_0^x 2e^{t^4}\,dt$ nel punto $x_0 = 0$

Risoluzione

(i)

(ii) Eq. piano tangente : $y = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$

$F(0) = 3$; $F'(x) = 2e^{x^4} \Rightarrow F'(0) = 2$

quindi $y = 3 + 2\cdot x$

Esercizio 1

[3 punti]

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivabile in $x = 0$, allora

- [a] $|f|$ ha un estremo locale in $x = 0$;
- [~~b~~] $|f|$ é continua in $x = 0$;
- [c] $|f|$ non é derivabile in $x = 0$;
- [d] $|f'(0)| = 0$.

Risoluzione (giustificare la risposta)

f derivabile in $x=0 \Rightarrow f$ continua in $x=0$

$\Rightarrow |f|$ continua in $x=0$

Esercizio 2

[3 punti]

Sia $\sum_n b_n$ una serie convergente e sia $a_n = (-1)^n b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora

- [~~a~~] $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 1$
- [b] $\sum_n a_n$ diverge
- [c] $\sum_n a_n$ é convergente
- [d] $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é oscillante

Risoluzione (giustificare la risposta)

Poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

da cui $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e quindi $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 1$

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f \in C^3(\mathbb{R})$ tale che $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$. Allora

- [a] $f = o((x-1)^3)$ per $x \to 1$
- [~~b~~] $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$ esiste finito
- [c] $f = o(x^2)$ per $x \to 1$
- [d] f ha un punto di estremo locale in $x_0 = 1$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Dalla formula di Taylor in $x_0 = 1$, si ha

$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!}$

$+ o((x-1)^3)$, quindi $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3} = \frac{f'''(1)}{3!}$

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-9}dx.$$

Risoluzione

$$\frac{x+2}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A-3B}{x^2-9}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-3B=2 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{5}{6}, \; B=\frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-9}dx = \frac{5}{6}\int_0^1 \frac{1}{x-3}dx + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{x+3} =$$

$$= \left[\frac{5}{6}\ln|x-3| + \frac{1}{6}\ln|x+3|\right]_0^1 = \ldots\ldots$$

Esercizio 5

[4 punti]

Risolvere l'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{y(t)}{t} = 2\arctan(t) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Risoluzione

Eq. lineare del 1° ordine : $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$

con $a(t) = -\frac{1}{t}$, $b(t) = 2\arctan(t)$ (sol. in $(0,+\infty)$)

$$A(t) = -\int_1^t 1/s\, ds = \left[-\ln|s|\right]_1^t = -\ln(t)$$

$$\int_1^t 2\arctan(s)\cdot e^{\ln(s)}ds = \int_1^t 2s\arctan(s)ds = \left[s^2\arctan(s)\right]_1^t -$$

$$-\int_1^t \frac{s^2}{1+s^2}ds = t^2\arctan(t) - \frac{\pi}{4} - \int_1^t ds + \int_1^t \frac{1}{s^2+1}ds$$

$$= t^2\arctan(t) - \frac{\pi}{4} - t + 1 + \arctan(t) - \frac{\pi}{4}$$

$$y(t) = \frac{1}{t}\left[\cancel{-1} + t^2\arctan(t) - t + \arctan(t) - \frac{\pi}{4} \cancel{+1} - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{2(t^2+1)\arctan(t) - 2t - \pi}{2t}$$

Esercizio 6

[5 punti]

Studiare la funzione $f(x) = |e^{x^2+3x} - 1|$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Risoluzione

$D(f) = \mathbb{R}$, f continua in $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ e $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow e^{x^2+3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2+3x = 0 \Leftrightarrow x=0$ e $x=-3$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2+3x} - 1 & \text{se } x^2+3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ e } x \geq 0 \\ 1 - e^{x^2+3x} & \text{se } x^2+3x < 0 \Leftrightarrow x \in (-3,0) \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ e $x \neq -3$, f è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x^2+3x}(2x+3) & \text{se } x \leq -3 \text{ e } x \geq 0 \\ -e^{x^2+3x}(2x+3) & \text{se } x \in (-3,0) \end{cases}$$

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 3$, $\lim_{x \to 0^-} f'(x) = -3$

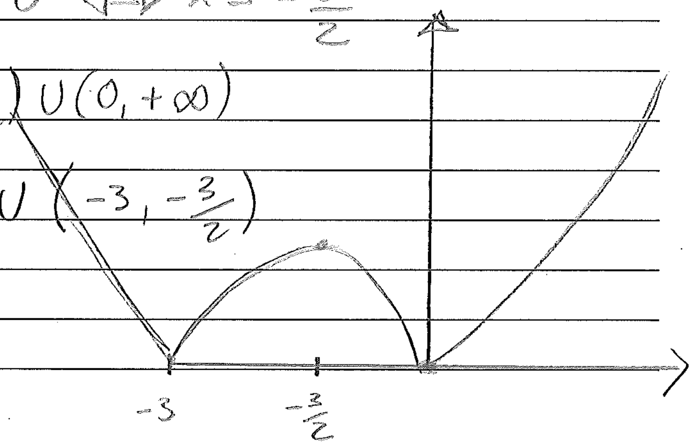
$\lim_{x \to -3^+} f'(x) = 3$, $\lim_{x \to -3^-} f'(x) = -3$

Punti angolosi in $x=0$ e $x=-3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

$f'(x) > 0$ se $x \in (-3, -\frac{3}{2}) \cup (0, +\infty)$

$f'(x) < 0$ se $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -\frac{3}{2})$



$x_0 = -\frac{3}{2}$ punto di max. locale